Digitized by Google

FRANCISCI DULAURENS

SPECIMINA MATHEMATICA

DUOBUS LIBRIS COMPREHENSA.

QUORUM PRIMUS Syntheticus agit de genuinis Matheſeos principiis in genere, in ſpecie autem de veris Geometriæ Elementis huc uſque nondum traditis.

SECUNDUS verò de Methodo Compoſitionis, atque Reſolutionis fusè diſſerit, & multa nova complectitur, quæ ſubtiliſſimam Analyſeos artem mirum in modum promovent.



[stamp]

PARISIIS,
Apud CAROLUM SAVREUX, Bibliopolam Juratum, in atrio Templi Beatæ Mariæ ſub inſigni trium Virtutum.

CIↃ. IↃC. LXVII.

CVM PRIVILEGIO REGIS.

14-19. G. 29
BIBLIOTECA NAZ. VITTORIO EMANUELE ROMA
Digitized by Google

14-3-O-26

Digitized by Google

CELSI AC PRÆPOTENTES

DOMINI, DOMINI

ORDINES GENERALES

FOEDERATI BELGII.

MIRABVNTVR ſanè plerique quod inter armorum ſtrepitus, quibus Rempublicam veſtram prælis., atque triumphis jamdudum aſſuetam iterum Bellona exercet, ego novum aliquod ex officina Minervæ Pacis Alumnæ profectum opus CELSITVDINIBVS VESTRIS *intempeſtivè, ſic illi putabunt, offe-*

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

ram. Verùm diſcant mores veſtros, ſciantque apud vos inter arma non ſilere leges, ſed eodem tempore ſcientiarum, armorumque ſtudia florere, atque eſſe loca ubi ſemper juventus veſtra omnis generis doctrinæ præceptis imbuitur, & militiæ ſcholam, in qua Tyrones aſſidue ad bella erudiuntur. Et ſane Rempublicam veſtram, quæ ſibi Marte peperit quietem, partamque tam acri legum cuſtodia ſervat, armis non ſolum decoratam, ut Iuſtinianus de Imperatoria Majeſtate dixit, ſed etiam legibus oportet eſſe armatam, ut utrumque tempus & belli, & pacis recte gubernari poſſit. His optimis artibus inſtructi nullo non tempore felices eſtis, & ita ſapienter omnia adminiſtratis, ut amorem erga populos veſtros, famam erga omnes mereamini. Haud ignota

Digitized by Google

loquor, ſed quæ paſſim apud omnes gentes de Regimine Belgii multa cum admiratione memorantur. Narratur ab una parte magnos Duces, quorum fama totum terrarum orbem implevit, prima militiæ ſuæ rudimenta in Belgio feciſſe, ab altera innumeros viros doctrinæ claritate inſignes, quorum egregia apud nos extant ingenii monumenta, in ejuſdem Belgii celeberrimis Academiis vel docendo, vel diſcendo literis operam dediſſe. Cùm igitur in vobis potiſſimum CELSI, AC PRÆPOTENTES DOMINI ORDINES *& ſpes & ratio ſtudiorum poſita ſit, quis conſilii mei rationes non approbet, ſi labores, & conatus, quos in re Mathematica, omnium ſcientiarum utiliſſima, non ſolum exornanda, verum etiam amplificandâ adhibui, glo-*

Digitized by Google

rioſiſſimo veſtro nomini dicare voluerim, optaverim, ambiverim. De Matheſeos utilitate plura hic dicere nihil attinet, poſtquam unus ex vobis, cujus ſapientiam, atque prudentiam in conſiliis, & ſummam in rebus agendis peritiam, ac vigilantiam non ſemel experti eſtis, ingenioſiſſimis inventis Geometriam locupletare non eſt dedignatus; qui, antequam publica munia obiret, ad exercitia Mathematica, vulgi captum ſuperantia, & mentis ſublimitatem indicantia bene temperatum animum applicuit, & hâc arduarum rerum tractatione ingentes ſpiritus ad fortiſſima quæque prima in adoleſcentia firmavit. Hoc tantùm in Mathematicarum ſcientiarum commendationem vobis afferre ſufficiat. Nunc quod in hoc opere præſtiterim breviter exponam.

Primò ex ſola quantitatis conſideratione principia quædam deduxi, numero pauca, & valdè ſimplicia, ex quorum nihilominus cognitione, atque comprehenſione omnium, quæ tam in Arithmetica, quàm in Geometria docentur, generalis ſcientia comparatur. 2°, Proportionum naturam explicui, & quoſdam inventionis fontes aperui, ex quibus propoſitiones omnes ad Proportionum materiam ſpectantes à quovis facillimè deduci poſſunt. 3°, nova quædam Elementa Geometrica conſtitui, ad quatuor propoſitiones commodiſſimè redacta; & ita univerſalia, ut inde geometricum robur accipiat quidquid in Mathematicis geometricam deſiderat ſolutionem. His peractis ad analyſim tranſivi, & ante omnia Compoſitionis, atque Reſolutionis metho-

Digitized by Google

dum ita perſpicuè tradidi, & analyticum artificium tam clare oſtendi ut eruditionis amantes, & adhuc in primo Matheſeos limine hærentes nemine alio docente his veræ Philoſophiæ clavibus uti, & apertis ſcientiarum theſauris ampliſsimas animi divitias ſibi comparare queant. Vltimo novis repertis quamplurimis, quæ hic recenſere nimis longum eſſet, ſubtiliſſimam analyſeos artem promovi.

Hæc quamvis minime levia majoris operis tantùm præludia ſunt, aut ſpecimina, de quo ut hic aliquid dicam, partem illam artis analyticæ abſolvo, quæ noſcendæ per æquationis medium veritati inſumitur, nam æquationum naturam, atque generationes novâ perveſtigatione proſequor, deinde certas Mathematicorum argumentorum ſedes affero, & topica

quædam alia detego, unde magna æquationum ad unicum problema ſolvendum copia parari poſsit, quod adhuc à nemine factum eſt, & de quæſtionum natura atque differentiis fusè diſſero, quem locum præ cunctis neceſſarium ab omnibus prætermiſſum eſſe miror; poſtea methodum trado quâ cuncta per analyſim inventu poſſibilia reperiri poſſunt, hanc methodum ſequitur alia multo admirabilior, per quam cujuſlibet æquationis terminos omnes intermedios auferre licet, & quidem duos, aut tres per ea quæ huc uſque reperta ſunt, verùm ad plures quàm tres auferendos neceſſe eſt ut nova reperta dentur, quæ generalis hujus methodi uſum latiùs extendant. Scio hoc paradoxum multis viſum iri, qui ſibi perſuadent omnia quæ humani ingenii viribus

acquiri poſſunt jam ab iis, qui de analyſi nuper ſcripſerunt inventa eſſe, aut facilè ex eorum principiis deduci poſſe; Ideò plura ſuo tempore dicenda hic non addam, quæ illorum hominum qui hujuſmodi erroris affines ſunt, fidem magis adhuc ſuperarent, ne ipſos in limine offendam; Hæc tamen apud me parata habeo, (nollem enim vanis promiſſis CELSITVDINVM VESTRARVM *aures replere,) ſed quoniam univerſalia, quæ primùm inventu difficilia ſunt, poſtea particularibus exemplis, tam ex Aribtmeticorum quàm Geometricorum fonte petitis oſtendere, res eſt plena laboris, idcircò ultimam manum tanto operi imponere nondum licuit.*

Reſtat Analyſeos pars altera, quæ nonnullas quæſtiones ſpectat, pro

Digitized by Google

quibus ſolvendis impoſſibile, aut admodum difficile eſt ad aliquam æquationem pervenire, quales ſunt ferè omnes, quæ planorum, vel ſolidorum curvilineorum quadraturas, aut cubationes inveſtigare proponunt, nam in hujuſcemodi quæſtionibus media deſunt, aut ſaltem difficillimè apparent ad inſtituendam curvi cum recto comparationem, & quamvis, verbi gratiâ, pro circuli quadratione lineam quamdam curvam imaginati ſint Veteres, quam ab officio quadratricem dixere, verumtamen ex hujus lineæ generatione, atque conſtitutione nulla æquatio elici poteſt ad propoſitam circuli quadrationem arguendam; adeò ut inveniendæ ſint methodi valdè particulares pro conſimilium quæſtionum ſolutione, ut paucis abhinc annis

apud vos fecit Huraetius, Hollando-Batavus, qui primus omnium curvarum linearum in rectas tranſmutationem edocuit; ſed Dominus Huddenius idem Hollando-Batavus, acerrimi vir ingenii, & Analyſta peritiſſimus hanc nodoſam de curvilineis materiam ita explanavit, quamquam illa quæ ſuper ea re acutiſſimè ſcripſit adhuc, ni fallor, in ſcriniis lateant, ut nihil ſit ab iſta parte, quod poſt doctos tanti viri labores ampliùs deſiderari videatur: Et ſic abſolutis duabus quas nominavi Analyſeos partibus nulla ſupererit quæſtio quæ per hanc artem via omnium ſimpliciſſima, ſicut Deo juvante oſtendam, reſolvi nequeat.

Interim Specimina hæc, CELSI, AC PRÆPOTENTES DOMINI ORDINES, *qualiacumque*

Digitized by Google

ſint eo quo ſoletis animo benigni accipere, & quaſi in votiva tabella perpetuam Authoris erga Vos obſervantiam, & æternum obſequium intueri dignemini obnixè rogat

CELSITUDINUM VESTRARUM

Humillimus Servus
FRANCISCUS DULAURENS, GALLUS.

Pariſiis, die primâ
Januarii, An. 1667.

Digitized by Google

INDEX CAPITUM
HUJUS OPERIS.

IN LIBRO PRIMO.

CAPUT I. DE *quantitate, ejuſque ſpeciebus, & diverſis proprietatibus,* 1

CAP. II. *De Proportionibus,* 20

CAP. III. *De præcipuis ſymptomatibus, quæ à quantitatum multiplicationibus, atque diviſionibus proveniunt, ſive de præcipuis æquationes inſtituendi modis,* 41

CAP. IV. *De Geometricis Definitionibus,* 58

CAP. V. *De Elementis Geometricis,* 89

IN LIBRO SECUNDO.

CAPUT I. DE *Methodo Compoſitionis, atque Reſolutionis,* 149

CAP. II. *De ſolutione Æquationum duas dimenſiones habentium,* 166

CAP. III. *De Æquationibus trium dimenſionum, earumque ſolutione,* 178

CAP. IV. *De ſolutione quadrimenſarum æquationum per earum depreſſionem ad tertium gradum,* 214

Cap. V. *De natura Æquationum plures quàm quatuor dimenſiones habentium, & de illarum ſolutione,* 222

IN ADDITAMENTIS.

Nova Methodus extrahendi radicem ſubæquibimenſam ex quibuſcumque binomiis, 237

Methodus univerſalis, & facillima extrahendi radices imperatas ex quibuſcumque binomiis, radicem binomiam, & planam habentibus, 240

Methodus univerſalis auferendi unumquemlibet terminum, primo excepto, è quavis æquatione propoſita, 247

Solutio Problematis à D. Walliſio totius Europæ Mathematicis propoſiti, ſed priùs ad generale revocati. Anno 1650, *eodem tempore quo propoſitum eſt,* 249

Digitized by Google

NOTÆ, SEV SYMBOLA

Quibus in ſequentibus utor.

Π æquale ut *a* Π *b*, id eſt *a* æquatur *b*.
Ր majus ut *a* Ր *b*, id eſt *a* major *b*.
ᒣ minus ut *a* ᒣ *b*, id eſt *a* minor *b*.
-+ plus ut *a* -+ *b*, id eſt *a* plus *b*.
& *a* ± *b*, id eſt *a* plus vel minus *b*.
— minus ut *a* — *b*, id eſt *a* minus *b*.
× multiplicationis nota ut *a* in *b*, id eſt litera *a* multiplicata, vel multiplicanda in *b*.
∷ proportio, ſive ratio æqualis, ut *a*. *b* ∷ *c*. *d*. Id eſt ut *a* ad *b*, ſic *c* ad *d*.
∺ continuè proportionales ut *a*. *b*. *c* ∺, id eſt ut *a* ad *b*, ſic *b* ad *c*.
√, radix, $\sqrt[2]{}$ radix 2ª poteſtatis, $\sqrt[3]{}$ radix 3ª poteſtatis, & cætera.
⊥ perpendiculum.
= parallelæ ut *a* = *b*, id eſt *a* parallela eſt ad *b*.
△ triangulum.
∠ angulus.
□ æquibimenſum ſive quadratum.
▭ bimenſum ſive rectangulum.
[3] æquitrimenſum, ſive cubus, [4] æquiquadrimenſum, &c.
[3]do cubando, vel ter multiplicando, [4]do quater multiplicando, &c.

SPECIMI-

SPECIMINVM MATHEMATICORVM

LIBER PRIMVS.

CAPVT PRIMVM.

De quantitate ejuſque ſpeciebus, & diverſis proprietatibus.

QUANTUM vocamus id omne, quod ex- I.
tenſionem, vel diſtinctionem in ſe reci-
pit, eadem videlicet quantitatis deno-
minatione duabus his rerum affectioni-
bus ſignificandis accommodata.

Maximè verò differt extenſum à rei di- II.
ſtinctę naturą; extenſio enim rem innuit undique ſibi cohę-
rentem, & unà velut continuitate productam, qualis eſt li-
nea, planumq; & omnia hujus mundi corpora, quæ propriè
magnitudines appellantur: qualis eſt etiam locus, tempus,
motus, pondus, potentia, & quidquid adunatum quo-
dammodo corporibus invenitur; contrà verò diſtinctio
rem compoſitam arguit, vel potiùs plurium rerum aggre-
gatum disjunctis inter ſe partibus compoſitum, ut eſt po-
pulus, acervus, & quidquid eorum, quorum partes pro-
priis extremitatibus terminantur, & ab alterius fine diſ-
cretæ ſunt, atque hujuſmodi rerum congeries peculiari
nomine multitudo dicitur. Hinc duas quantitatis ſpecies
inter ſe valdè diſſimiles intueri licet, quarum prima natu-

Digitized by Google

ram extenſionis reſpiciens continua vocatur; altera verò diſtinctionis eſſentiam declarans, ideò diſcretæ, ſive ſeparatæ nomen obtinuit.

III. Præter innatum, aſſignatumque harum quantitatum diſcrimen, magnam etiam inter earum ſubjecta diſparitatem natura propoſuit; continua namque quantitas ad res extenſas tantummodò pertinet, eaſque ſolas afficit, nec in ullis aliis unquam reperitur; ſeparata verò præter extenſorum genus, quod totum ei ſubjicitur, etiam in rebus omni quantitate deſtitutis locum habet, dicimus enim duo puncta, tria momenta, decem ſpiritus, &c. Quamobrem diſcreta quantitas non ob ſubjectum ſuum, quod aliquando quantitatis expers eſt talis denominatur, ſed hoc ideò nomine gaudet quod plura ſubjecta ſimul reſpiciat, in qua pluralitate ſemper ineſt diſtinctio, quamvis in unoquoque ſubjectorum nec ulla diſtinctio ſit, nec extenſio. In eo itaque diſſimilitudo ſita eſt quod diſcreta quantitas omnia rerum genera pervadit, eiſque ſe accommodat; continua verò contractiore ſignificatu extenſi limites non egreditur.

IV. Hîc obiter notandum occurrit æquivocam eſſe magnitudinis appellationem, & utrique quantitatis ſpeciei convenire, id eſt tam continuam, quam diſcretam quantitatem magnitudines appellari poſſe. Dum enim magnum quid nominamus ad nominatæ rei molem, ſive quantitatem tantummodò reſpicimus, adeò ut magnitudinis ſignificatio, nihil aliud quam rei molem, determinatamve magnitudinem involvat: quare cùm numeri ſuas etiam determinatas habeant quantitates magni propterea dicendi erunt. Uſus tamen obtinuit ut magnitudinis nomen præcipuâ quâdam ratione quantitati continuæ tribueretur, nec immerito quidem jure, quoniam magnitudo, quæ quantitatem rebus inexiſtentem ſignificat, illam potius continuam, ſibique cohærentem denotat, quam partibus disjunctis inter ſe copulatam; quicquid enim ſimplex eſt quovis compoſito, vel partium aggregato facilius apprehenditur; unde cùm quantitatis continuæ natura indiviſam habeat unitamque ſubſtantiam, æquiùs illa pro-

pter ſimplicitatem ſuam, facilemque comprehenſionem magnitudo vocabitur, quam compoſita atque diviſa numerorum natura, quæ non ſimplicem, ſed aggregatam ex pluribus quantitatibus magnitudinem repræſentat. V.

Quantitati verò diſcretæ, nimirum multitudini præcipuè convenit diviſio; dividi enim nihil aliud eſt quàm ſeparari, ſive diſtingui; multitudinis autem naturam in ſola diſtinctione poſitam eſſe ſuprà vidimus. Quoniam verò magnitudo partium ſuarum diſtinctionem ſuſtinere valet, ſicut & multitudo, propterea diviſibilem illam etiam agnoſcere jubemur.

VI. Diſtinctio verò à diviſione in eo differt, quod diſtinctio quamcumque pluralitatem exprimit; diviſio verò eam ſolam deſignat, quæ à rerum, ut ita dicam, ſeparabilitate exoritur. Unde ſi diſtinctio pro quodam genere accipiatur, erit diviſio pro ejus ſpecie conſequenter aſſumenda.

VII. Neque verò actualis tantummodò diviſio multitudini concedenda, verumetiam potentialis tribuenda videtur; non enim unquam ita diviſa eſt, ut pluribus aliis modis ſecari non poſſit; veluti numerus duodenarius non ita diviſus eſt in partes ſuas duodecimas, ut in tertias, quartas, ſextas, & adhuc alias quaſdam ſine nomine dividi nequeat. Sic igitur diviſibilitas communis utrique quantitatis ſpeciei proprietas eſt, cum hac nihilominus differentia, ut quam actualem, virtualemque diviſionem multitudo ſibi principaliter aſſumit, eandem potentialem tantùm, derivatamque magnitudo participet.

VIII. Ex hoc diſcrimine conſequitur cunctam vim multitudinis, quæ certo, determinatoque partium numero conflatur modum in diviſione recipere, ſive diviſionis terminos habere, ultra quos ſectio ampliùs procedere nequit; magnitudinem verò, quæ nullis inter ſe diſtinctis partibus coagmentatur diviſionem in infinitum admittere, infinitiſſimas ſui corporis ſuſcipiendo ſectiones. Nam quando multitudo dividitur, quia in illa partium numerus determinatur, neceſſe eſt etiam diviſionis modos in eadem determinari; & conſequenter potentiæ diviſivæ vim, quæ

Digitized by Google

tunc ad certos illos modos contrahitur, alligaturque, aliquando exhauriri, & tandem omninò ſiſti, quando videlicet ad ultimam uſque diviſionem perventum erit. At in magnitudinis diviſione idem accidere nequaquam poteſt, potentia enim diviſiva numero partium, quæ nullæ hîc adſunt determinatæ non limitatur, nec ullâ aliâ ratione impeditur; unde cùm libera maneat ſubjectum ſuum in quotcumque partes reſolvendi virtutem ſuam in infinitum extendit, potentia enim quæ non reſtringitur vaga eſt. Itaque manifeſtum eſt multitudinis diviſibilitatem longè aliam eſſe ab ea diviſibilitate quæ in magnitudine reperitur: hæc enim infinitæ cùm ſit virtutis nullum unquam ſecandis corporibus finem imponit; altera verò limitatam habens potentiam circa præfinitas quaſdam diviſionis rationes ſolummodo verſatur, & determinatis certarum partium ſpatiis incluſa coërcetur.

IX. Partes autem in continuo, ſicut ſuperiùs aſſumptum eſt, nullas actu reperiri ipſamet extenſionis vox ſatis apertè declarat, illa enim ubique continuatam, hoc eſt nullis locis interruptam ſubſtantiæ unitatem & meram ad quaſlibet diviſiones capacitatem ſignificat, quam continui ſic unitam, cohærentemque ſubſtantiam partium præſentia profectò corrumperet, & puram illam ad quaſlibet diviſiones capacitatem omninò deſtrueret.

X. Omnis præterea finita atque determinata quantitas, (de qua ſola, non de infinita, quæ ſub ſcientiam non cadit ſermonem inſtituimus,) ſive continua ſit, ſive diſcretam habeat naturam, per infinitos incrementorum gradus augeri, noviſque ſemper acceſſionibus major fieri poteſt, ita ut nullus augmentationi finis moduſve exiſtat. Illimitata hæc quantitatis (ſi dicere licet) augmentabilitas infinitam continui, ſive extenſi diviſibilitatem ex adverſo reſpicit, ſicut enim extenſæ quantitatis continuitas diſſolvi, & in partes ſecari poteſt; ita etiam eandem continuitatem per oppoſitam potentiam ad naturæ ſuæ integritatem reſtitui poſſe convenit. Quare cùm infinitos diſſolutionum gradus dividens potentia pertranſeat, ita infinitos conjunctionum nexus componens potentia de-

bet ordiri, ut cuilibet ſectioni ſua junctura reſpondente quod diſſolutione ſolutum fuerat per compoſitionis opus ad cohærentiam revocetur, & in priſtinam compagem redeat. Eſt igitur conjunctivæ cujuſdam potentiæ vis infinita ſicut & disjunctivæ; & ſicut continuum in infinitum dividi poteſt, ita per contrariæ potentiæ virtutem in infinitum augeri valet. Quoniam verò continui diviſibilitas infinitam partium multitudinem involvit, certè numerus qui ad quamcumque pluralitatem exprimendam naturâ ſuâ idoneus eſt illa dividentis potentiæ infinitate afficietur, unde numerus quoque hac ratione in infinitum augmentabilis evadit. Nunc ſi magnitudinem prout dividi poteſt conſideres; numerum verò quatenus ſemper augeri valet ſpectes poſſibilia magnitudinis decrementa poſſibilibus numerorum augmentis ex oppoſito ſibi reſpondere invenies. Sicut enim determinata magnitudo à finita, & unitatis locum tenente inchoans quantitate per innumeras, ac nuſquam propter infinitam diviſibilitatis ſuæ potentiam deſituras corporis ſui ſectiones gradatim decreſcit; ita etiam multitudo ab unitate exordium ſumens per continuas unitatis appoſitiones, veluti per aliquos gradus in immenſam, indefinitamque molem paulatim aſſurgit. Per has itaque dictarum quantitatis ſpecierum oppoſitas affectiones latitantem in earum naturis contrarietatem quandam agnoſcere licet; numerorum enim crementum ab unitate incipiens ex diminutione magnitudinis per unitatem ſignificatæ proficiſcitur, contra verò magnitudinis augmentatio, ſive continui reſtitutio decreſcente partium multitudine paulatim reſurgit, donec tandem reſolutâ numerorum compage unitas occurrat, quæ & priſtinam dictæ magnitudinis continuitatem reſtituit, & quod illi per numerorum generationes ademptum erat reponit.

A diviſione porrò rerumque diſtinctione plus, minus, æqualitas, inæqualitas, atque ſimilia primùm orta ſunt. Propoſitis enim pluribus inter ſe diſtinctis, atque diviſis quantitatibus factum eſt ut una alteri collata ſit ſecundum molem, ſummamque ſui corporis, & quæ reperta XI.

eſt aliam ſuperare, vel excedere, ſive quod idem eſt plus molis habere, ea major eſt dicta, quæ verò ab alia ſuperari, vel deficere, ſive quod idem eſt minus habere molis inventa eſt, ea minoris nomen obtinuit: at quando per varias comparationes tandem accidit ut quædam quantitates oblatæ fuerint, quæ tales erant inter ſe ut ſibi comparatas nec excederent, nec viciſſim ab eis excederentur hujuſmodi quantitates æquales appellare placuit.

XII. Satis patet has quantitatis proprietates eo quo dictum eſt modo generari debuiſſe; nihil enim æquale, majus, minuſve ſuimet ipſius reſpectu dicitur, ſed tantum aliorum collatione tale denominatur. Unde ſequitur nullam quantitatem ſolitariè ſumptam talium caracterum proprietate eſſe affectam, ſed tantummodo plures ſimul affici poſſe; & quoniam pluralitas diſtinctionem ſuppoſitorum involvit non eſt æqualitatis & inæqualitatis principium aliunde quam ab ipſamet diviſione petendum.

XIII. Ex hac ſic explicata æqualitatis inæqualitatiſque generatione, earum natura ritè cognoſci poteſt. Quoniam enim ad æqualitatis, inæqualitatiſque conſtitutionem talis conditio requiritur ut plures quantitates inter ſe conferantur, manifeſtum eſt æqualitatem, inæqualitatemque certas eſſe quantitatum inter ſe relationes, atque habitudines. Deinde quia ſola quantitatum inter ſe comparatio non ſufficit ut æquales, inæqualeſve dicantur, ſed inter ſe ſecundùm corporis ſui molem conferri debent, ſequitur illas quantitatum habitudines naturam habere in quantitatis æſtimatione fundatam. Quapropter æqualitatem, inæqualitatemque certas eſſe quantitatum inter ſe juxta corporis molem, amplitudinemve comparatarum habitudines colligere licet.

XIV. Perſpicuum eſt ſupradictas quanti paſſiones inter ſolas ejuſdem generis quantitates reperiri poſſe, veluti inter duos numeros, duaſve lineas, non verò inter numerum atque lineam; ſola enim quæ ſunt unius generis inter ſe comparabilia ſunt, æqualitatem autem, & inæqualitatem certas eſſe quantitatum inter ſe comparationes ſuprà vidimus.

Æqualitas medium inter majoritatem, ac minoritatem locum obtinens immutabilem eapropter eſſentiam vimque ſortita eſt, atque in alias naturaliter manet indiviſa ſpecies; medium enim ſtabilitatis, atque conſtantiæ ſedes uno tantum modo ſe habet, nec ulli poteſt obnoxium eſſe mutationi. Contra verò quæ ſuprà, infraque poſita ſunt ut majoritas, ac minoritas perpetuò mutantur, & in vertibilem inconſtantiam tranſeunt. Propter hanc æqualitatis uniformitatem, propriamque moderationem ea pro regularitatis fundamento adhibetur, ad cujus menſuram omnes majoritatis, ac minoritatis ſpecies ab ea deflectentes, & modò propiùs, modò remotiùs ad eam accedentes examinantur. In quovis enim rerum genere quod ordinatum eſt, tanquam fixum quid ſupponi debet, cujus comparatione aliarum irregularitates dignoſci queant, & ad artem revocari. Id etiam cauſæ eſt cur majoritas, ac minoritas ſub communi inæqualitatis nomine comprehendantur, ſic enim omnis earum anomalia ad unam eandemque methodum per communem illam denominationem redacta ſimplicius aliquo modo tractatur, ac facilius poſtea ad æqualitatis naturam legeſque quoad fieri poteſt ordinatur. XV.

Inſuper æqualitas nec æqualium additione, detractione neve ullo pacto alteratur, nec communi per æqualia multiplicatione vel diviſione mutatur; hujus rei cauſa eſt invariabilis ipſius natura, & conſtans uniformitas; quidquid enim circa quantitates æquales æqualiter operaberis nullam ex hujuſmodi operatione diverſitatem, & deformitatem æqualitas recipit, manente ſemper eadem; immutabili nimirum exiſtente in omnibus æqualitate; adde quod æqualitas quædam identitatis ſpecies eſt, unde æquales quantitates æqualium, ſive earumdem quantitatum, & ſimilium operationum identitate receptâ æquales poſtea manere neceſſe eſt; æqualitas autem per ſibi contrariæ inæqualitatis acceſſionem omninò deſtruitur. XVI.

Inæqualitatis verò duo, ut jam vidimus, genera reperiuntur, majoritas nimirum atque minoritas. Utrumque ex utraque medii, videlicet æqualitatis parte, primum XVII.

excedendo, ſecundum deficiendo profluens ab ea per Indefinita ſpatia recedit. Facilè tamen ad æqualitatem ambo revocantur, duabus enim propoſitis inæqualibus quantitatibus ipſas æquales inter ſe efficies ſi earum differentiam acceperis, & hanc minori quantitati addideris, vel eandem à majore ſuſtuleris, per hanc enim differentiæ additionem, detractionemque quantitatum inæqualium exceſſus, atque defectus corrigitur, & inæqualitas ad æqualitatem revocatur.

XVIII. Tanta eſt æqualitatis moderatio, ut eas non ſolùm quas afficit quantitates augeat, minuat, multiplicet, atque dividat nullâ factâ in ipſis quoad æqualitatem mutatione, ſed etiam ut quantitates ab inæqualitate affectas per ſimiles operationes tractando intactam in ipſis inæqualitatis notam relinquat. Hoc facilè colligitur ex ſuperiùs explicata inæqualitatis ad æqualitatem revocandi ratione; ut enim inæquales quantitates ad æqualitatem perveniant neceſſe eſt addi minori, vel à majore detrahi ipſarum quantitatum differentiam, ſed per communem æqualium additionem, vel ſubductionem neque minor quantitas majoris differentia augetur, neque major eadem differentia contrahitur, cùm idem utrique inæqualitatis parti adjiciatur, aut dematur: ergo ſive æqualium additione, aut multiplicatione, ſive æqualium detractione, vel diviſione inæquales quantitates augeantur, minuanturve, nunquam hâc ratione in æqualitatem incident, hoc eſt manebit ſemper in ipſis inæqualitas: Sic ergo æqualitas ſeipſam primò, deinde inæqualitatem per quælibet augmenta, vel decrementa modo æqualia deducere valet, nullo aut æqualitatis, aut inæqualitatis detrimento.

XIX. Quando inæqualitas ut à perfectione declinans proprietas conſideratur, æqualitatem ſemper in conceptu ſuo involvit, & tunc inæqualium quantitatum una major, ſive excedens; altera minor, ſive deficiens ſimpliciter dicitur: hæ deficientis & excedentis denominationes ſatis ſuperque oſtendunt æqualitatem hîc neceſſariò ſupponi; exceſſûs enim atque defectûs nomina aberrationes à medio

à medio termino, hoc eſt ab æquali ſignificant. Atque hoc ſenſu utrumq; inæqualitatis genus à fixa æqualitatis margine, tanquã à radice quadam pronaſcens vagis erroribus hinc inde digreditur, in varias ſe ſe diffundendo ſpecies, quarùm una quæque infinitis modis variari poteſt nullo irregularitatis fine exiſtente. Nam quoniam inæqualitatis vox nihil aliud quàm certas ab ęqualitate deflexiones, ſive diſtantias hoc in loco ſignificat, conſequens omninò eſt ut tot diverſitates inæqualitas induat quot modi reperientur variandæ iſtius diſtantiæ; illa autem diſtantia, ſaltem in quantitate continua, infinitarum capax eſt mutationum, nam in infinitum augeri, atque minui, ideſt alia ſemper, atque alia valet evadere: reſtat ergo ut innumeras inæqualitatum diverſitates magnitudinis natura ſuſtineat. Quando verò inæqualitas in ſe cõſideratur, hoc eſt quando inęqualitatis termini inter ſe ſecundum quantitatis molem atque capicitatem comparantur, nullo habito ad imperfectam inęqualitatis naturam reſpectu, alia tunc illi termini nomina ſortiuntur; nam qui major eſt, ſive qui alium continet minoris reſpectu totum dicitur; qui verò minor exiſtit, ſive qui ab alio continetur majoris comparatione pars nominatur, unde licet hîc definire totum dicendo id eſſe quantitatem majorem ad minorem, & homogeneam collatam; partem verò minorem eſſe quantitatem ad majorem, & homogeneam comparatam. Atque ex his definitionibus manifeſtum fit totum majus eſſe ſua parte.

XX. Quantitas aliqua ſolitariè ſumpta ſicut neque major, neque minor eſt, ita neque totum, neque pars dicitur, ſed ut minor eſt cujuſdam majoris comparatione minor, ſic pars eſt cujuſdam totius comparatione pars. Itaque totum & pars relatione quadam inter ſe affecta ſunt.

XXI. Quando pars aliquoties ſumpta totum ſuum præcisè conſtituit, ideſt quando aliquoties ſumpta toti ſuo fit æqualis, tunc aliquota dicitur, quaſi certa, atque determinata, notabili nimirum ab omnibus alijs diſcrimine evidens, & naturæ ſuæ claritate ſe ſe intellectui pleniſſimè; ac ſine ambage manifeſtans, ob eam cauſam perſpicua difinitione facilè comprehenditur, ac voce maximè pro-

pria, & abſoluta per ſe nominatur: Atque hæc pars toti ſuo commenſurabilis eſt, illa enim eſt velut menſura, quæ ſeipſam primò, deinde aliquoties repetita, vel ſibi ipſi addita totum ſuum menſurat, quæ cùm ipſummet etiam hac ratione adæquet, neceſſe eſt & menſuram, & commenſurabilitatem in æqualitate fundari.

XXII. Pars autem ſibi ipſi addita quoties opus eſt ad totum ſuum coæquandum, tunc à ſuo toto non differt, niſi quod totum primariò acceptum tanquam indiviſum quid ponitur, alterum verò huic æquale, quod aggregatis partibus componitur, ut diviſum in ſe conſideratur.

XXIII. Major quantitas multiplex vocatur alterius minoris quando minorem illam aliquoties præcisè continet, ſive quando ab illa minori quantitate præcisè menſuratur. Itaque multiplex totum quoddam eſt aliquotis, & æqualibus inter ſe partibus compoſitum, & ad ipſas relativum.

XXIV. Quando verò pars, aut quantumlibet exigua hujus partis portio aliquoties ſumpta toti ſuo æqualis fieri nequit, ſed vel ipſum ſemper excedit, vel ab eo ſemper deficit, tunc aliquanta vocatur, hoc eſt quantitatis majoris portionem referens, certam illam quidem, ſed quæ parùm aperto ab aliis diſcrimine ſe ſe noſcendam præbet, ideoque naturæ ſuæ obſcuritate difficilem habet, ut ita dicam, comprehenſibilitatem: Hinc clara per ſe inexplicabilis eſt oratione, ſed per impropriam relationis vocem confusè tantum effabilis, atque hæc pars toti ſuo incommenſurabilis eſt, illa enim velut menſura ſumi non poteſt, cùm ſibi ipſi quocumque modo addita toti ſuo coæquari numquam valeat. Itaque tota incommenſurabilitas inæqualitate fundatur.

XXV. Omnis quidem commenſurabilitas poſſibilem, incommenſurabilitas verò impoſſibilem æqualitatem, vel potius æquationem ut oppoſitis facultatibus, ita contrariis vocibus exprimunt; unde has quantitatis affectiones naturas habere diximus in æqualitatis, & in inæqualitatis baſi fundatas; verùm illarum eſſentiæ ab aliis quàm ab æqualitatis, & inæqualitatis fontibus profluunt. Hos fon-

tes inveſtigare, & ab eis commenſurabilitatis, & incommenſurabilitatis cauſas omnes deducere facillimum eſt: nam qui numerorum naturam attentè conſiderabit (de numeris propriè dictis, vel effabilibus abſolutiſve hic tantummodo loquor) is in ſymmetriç, ſive commenſurabilitatis cognitionem, atque comprehenſionem nullo negotio deveniet ; qui verò magnitudinis eſſentiam, atque proprietates ſcrutabitur, illum incommenſurabilitatis origo non latebit : Sicut enim ex naturali numerorum ſtructura commenſurabilitas exſurgit, ita ex naturali magnitudinis conſtitutione incommenſurabilitas exoritur, quod manifeſtum fit hac ratione. Omnis numerus juxta poſſibiles quæ ſunt in eo ſectiones diviſus tandem relinquit unitatem, ſive particulam ſui minimam, quæ ſectionem non admittit, docuimus enim omnem numerum diviſibilitatis ſuæ terminos habere, ultra quos ſectio non procedit ; unitates autem omnes ideò ſunt inter ſe æquales, quod numerorum minimę ſint particulæ :(minima enim homogenea ob id ſolùm quod minima ſint inter ſe æquari neceſſe eſt, ut rationis lumen oſtendit;) dividitur ergo quilibet numerus effabilis in particulas æquales, quæ quidem aliquoties ſumptę diviſum quemlibet numerum reſtituunt, ſive adæquant: Unitas igitur communis eſt omnium numerorum menſura; verùm in magnitudinibus communis menſura ſic inveniri nequit, menſura enim ut ejus natura declarat debet eſſe certa, atque determinata: Atqui omnis magnitudo in infinitum diviſa non relinquit particulam, quæ propterea quod parva ſit ſecari non poſſit, quin illa in infinitum ſecta infinitas efficit particulas, quarum ſingulæ in infinitas minores ſectiles ſunt, ut res finem habitura non ſit, ſi quis minutias omnes conſectari velit. Nunquam igitur ex infinita magnitudinis diviſione ad aliquam particulam devenietur, quæ minima dici debeat, nec propterea certa determinataque dabitur in magnitudine particula, quæ pro communi omnium magnitudinum menſura ſumi queat, nam ſi talis daretur eam minimam eſſe neceſſe foret, quandoquidem in minimo ſolùm diviſio ſiſtitur, atque determinatur. Uides ergo quo-

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

modò limitata numerorum effabilium diviſio ſymmetriam producat, & tur in infinitũ continuata magnitudinis ſectio aſſymmetriæ, ſive incommenſurabilitatis cauſa dicatur.

XXVI. Atque hinc primò colligere licet numeros omnes invicem eſſe commenſurabiles, cùm eos menſuret, & adæquet aliquoties repetita unitas; magnitudines verò quarumlibet diviſionum capaces cùm ſint, hâc de cauſa quandoque inter ſe commenſurabiles exiſtere, quando videlicet numericas diviſionum ſpecies aſſumunt, ſive cùm aliquoties iterata unius per alteram, ſive dividui per diviſorem, & diviſoris per reliquum ſectione tandem oritur particula, quæ ambabus quantitatibus aliquota eſt, vel quæ, ſicut jam vidimus, aliquoties ſumpta ambas quantitates reſtaurat; aliquando verò incommenſurabiles eſſe, quando ſcilicet numericas diviſionum ſpecies non admittunt, ſive quum in infinitum continuata unius per alteram, ſive dividui per diviſorem, & diviſoris per reliquum ſectione producta particula ſemper ambabus quantitatibus, vel ſaltem alterutri ex illis, aliquanta manet, hoc eſt ſicut oſtendimus quæ aliquoties ſumpta ambas quantitates minimè reponit, ſed eas, vel alterutram ſaltem ſemper excedit, vel ab eis, ſive ab alterutra ſaltem ſemper deficit.

XXVII. Præterea quoniam duas quaſcumque propoſitas quantitates, ſi juxta menſuram inter ſe comparentur, vel commenſurabiles, vel incommenſurabiles exiſtere neceſſe eſt; totiuſque commenſurationis naturam in ſola quantitatum æquiſectione ab eodem diviſore facta conſiſtere docuimus; evidens profectò eſt partes illas, in quas tunc diviſæ quantitates propter earum ſymmetriam diſpeſcuntur, unitatum naturam induere, ſive per unitates, aut per idem unitatum aggregatum repræſentari debere; ſola enim hæc numerorum nomina æquiſectionum partibus exprimendis idonea ſunt, quod cùm ipſum numericum ſit, ideò ſymmetrarum quantitatum habitudines omnes numericas eſſe disertè pronuntiamus. Sunt igitur commenſurabiles quantitates qualeſcumque illæ ſint ut numerus effabilis ſive abſolutus ad numerum effabilem, ſive abſolutum; & ſi quælibet quantitates eam inter ſe relationem habent

quam numerus abſolutus ad numerum abſolutum, ipſæ erunt invicem commenſurabiles.

Ampliùs manifeſtum eſt nullam inter commenſurabiles magnitudines proportionem exiſtere poſſe, quam non eandem in numeris quoque reperire liceat, neque viciſſim in diſcretis ullam dari quam non in continuis exhibere valeas; infinitos enim diviſionum modos, nedum determinatos omnes, qui in numerorum ordine reperiuntur magnitudinis natura complexa eſt. Nihil igitur de numerorum ſymmetria demonſtrari poteſt quin idem, & per eaſdem rationes in quolibet magnitudinum genere oſtendatur. Quod autem eorum quæ ad incommenſurabilitatem ſpectant nihil quicquam numeris conveniat jam eſt antè ſancitum, quando numeros omnes invicem commenſurabiles eſſe concluſum eſt. Itaque concepta de commenſurabilitate problemata vel theoremata, & ad numeros abſolutos & ad magnitudines ordinata eſſe cenſeantur, verùm ad aſſymmetriam pertinentes propoſitiones ſolis magnitudinibus, & ſurdis eas exprimentibus congruæ ſunt. XXVIII.

Utrum autem fortuitò oblata ſive problemata, ſive theoremata in quibus commenſurabilitas, vel incommenſurabilitas ex ipſis terminis non ſtatim apparet geometrica ſolùm, an verò numerica ſimul ſint, ideſt utrum ſolis magnitudinibus, an verò magnitudinibus, & numeris etiam accomodari poſſint hâc ratione dignoſces; nam ſi ad illorum conſtructionem arbitraria tantùm requiratur quantitatum diviſio, vel multiplicatio, indubitabile ſignum eſt ipſa de utraque quantitatum ſpecie ſimul exponi, quandoquidem quantitates omnes naturâ ſuâ diviſibiles ſunt, & ex appoſita conditione liberum manet illas quocumque modo dividere. Unde ſequitur hujuſmodi problemata quantitates in genere ſumptas reſpicientia generaliter enuntianda eſſe: Si verò per appoſitam in quæſtione conditionem determinatæ vel multiplicationes, vel diviſiones neceſſariæ ſint ad quæſitum efficiendum, tunc generales commenſurabilitatis, vel incommenſurabilitatis regulæ, ſive canones docebunt XXIX.

utrum numerorum eſſentiæ talibus multiplicationibus, aut diviſionibus ferendis idoneæ ſint. Atque ſic agnita ejus quod proponitur univerſalitate, vel particularitate, univerſalis etiam, aut particularis efformanda concluſio eſt.

XXX. Optimam verò tum commenſurabilitatis, tum incommenſurabilitatis inveſtigandæ methodum nobis tradit alterna quantitatum diviſio, quæ ſi diviſore dividuum ſuum exactè numquam dividente, vel numquam ita ſecante quin aliquid reſidui pro ulteriori diviſione ſuperſit perpetua fiat, certiſſimum erit latentis inter diviſas quantitates incommenſurabilitatis indicium. Si verò ad perfectam, exactamque dividui æquiſectionem pervenire, atque ſic deficiente reſiduo diviſionem ſiſti contingat, evidens erit commenſurabilitatis inter diviſas quantitates exiſtentis argumentum. Quapropter ad evincendam duarum quantitatum incommenſurationem nihil aliud oſtendi debet quàm eas ſic ad invicem eſſe comparatas, ut ex infinitis particulis, ab innumeris ipſarum ſe ſe reciproce dividentium ſectionibus oriundis ne minima quidem unius portio alterius quantumlibet exiguæ portioni æqualis occurrere poſſit, ſicut ad arguendam aliarum commenſurationem probaviſſe ſufficiet talem inter eas reperiri neceſſitudinem ut illarum reciproca diviſio paululùm progreſſa propter exſurgentem dividui æquiſectionem deſinere cogatur, quælibet enim operatio ad æqualitatem perducta in unitatem, atque identitatem incidit, itaut illam ulterius provehi repugnet.

XXXI. Atque hæc pauca de ſymmetria, & aſſymmetria prælibaſſe ſufficiat, nunc cæteras quātitatis in genere ſumptæ proprietates proſequamur. Quando igitur binas inter quantitates exiſtens æqualitas, aut inæqualitas latiſſimè ſumpta vocabulorū ſignificatione conſideratur, ſive quando non determinatur quænam, & quanta ſit illa vel æqualitas, vel inæqualitas, ſed vaga tantùm, & illimitata concipitur, tunc, ut ſuprà concluſum eſt, inter propoſitas quantitates ſecundum quantitatis molem comparatas ſimplex æqualitatis vel inæqualitatis emergit habitudo; verùm ſi hujus

habitudinis ſignificatio reſtringatur, & æqualitatis aut inæqualitatis genus ad particularem aliquam ſpeciem revocetur, átque determinetur, quamvis æqualitas nullam propriè loquendo admittat varietatem, tunc determinatus ille binarum quantitatum reſpectus non jam ſimplex æqualitatis, aut inæqualitatis habitudo, ſed ratio, dicitur; unde hîc rationem, vel proportionem definire licet dicendo eam eſſe determinatam quandam æqualitatis, inæqualitatiſve ſpeciem.

Quoniam autem duarum quantitatum differentia noſcitur per minoris à majore ablationem, ac minor à majore vel ſemel, vel quoties id fieri poteſt aufferri valet, ex his duobus diverſis quantitatem à quantitate detrahendi modis, duæ diverſæ naſcuntur rationum vel proportionum ſpecies. Prima videlicet quæ ex ſimplici ſubtractione, hoc eſt quantitatem à quantitate ſemel aufferendo generatur, numeralis ſive arithmetica ratio, proportiove dicitur. Secunda verò, quæ à diviſione, hoc eſt quantitatem à quantitate quoties id fieri poteſt aufferendo oritur; ratio ſive proportio geometrica nominatur, & orta ex unius quantitatis per aliam diviſione quantitas, rationis quotus, vel quantitas, ſive etiam quia quotus ille quantitates, ex quarum diviſione provenit in certa æqualitatis, aut inæqualitatis ſpecie conſtituit, rationis denominator, atque ſpecies vocari conſuevit. XXXII.

Jam verò cùm duplex ſit inæqualitas, exceſſus nimirum, atque defectus, idcircò duarum inæqualium quantitatum comparatio dupliciter inſtitui poteſt. Quando major quantitas minori comparatur ipſarum ratio exceſſiva dicatur, quoniam tunc comparatio fit ſecundum exceſſum. Quando verò minor majori confertur, ipſarum ratio defectiva vocetur propter factam ſecundum defectum comparationem. Quantitates autem ſic comparatæ rationis termini vocantur, quorum primus, à quo nempe ratio incipit, antecedens; ſecundus verò, in quo deſinit, conſequens nominatur. XXXIII.

Maxima autem diſtinctio facienda eſt inter rationis terminos, & ipſam rationem. Nam rationis termini in XXXIV.

infinitum augeri poſſunt, manente ſemper eadem ratione; ut ſuo loco probabitur.

XXXV. Jam quando duæ ſimiles, ſive æquales rationes inter ſe comparantur, hæc ſimilium rationum comparatio, analogiſmus, ſive adhuc proportio dicitur, ubi videre eſt Mathematicos proportionis nomine vulgò abuti ſolitos dum per illud rationem etiam ſignificare volunt, quando autem duæ ſimiles rationes inter ſe comparatæ numerales ſunt, ſive arithmeticæ, tunc arithmetica proportio nuncupatur, geometrica verò dicitur dum comparatæ rationes geometricæ ſunt. Rem illuſtremus exemplis: Sunto duæ quantitates, verbi gratiâ, duo ſequentes numeri 12. & 3. quos inter ſe confere velimus. Primò ſemel detrahamus minorem 3. ex majore 12. dico reſiduum numerum 9. qui poſt ſubductionis opus remanet, eſſe exceſſum, ſive differentiam majoris numeri 12. à numero 3. atque exceſſum illum, ſive determinatam propoſitorum numerorum differentiam generare, ac conſtituere arithmeticam rationem. Ampliùs ſi duas quaſcumque arithmeticas rationes modo inter ſe ſimiles conferam, verbi gratiâ, rationem 12. ad 3. cum ratione 15. ad 6. nam detrahendo 6. ex 15. tantumdem relinquitur quàm ſi 3. ex 12. demeretur, nimirum 9. aſſero hanc arithmeticarum atque ſimilium rationum comparationem, quæ per differentiarum æqualitatem progreditur, generare ac conſtituere proportionem arithmeticam, ſive numeralem.

XXXVI. Jam verò propoſitis iiſdem numeris 12. & 3. minorem 3. ex majore 12. non ſemel ut ante, ſed quoties id fieri poteſt aufferamus, ſive quod idem eſt majorem 12. per minorem 3. dividamus, quotus ex hac diviſione proveniens eſt numerus 4. qui ſuis unitatibus indicat numerum 3. in numero 12. quater contineri, vel numerum 12. quadruplum eſſe numeri 3. Dico igitur exceſſum numeri 12. ſupra numerum 3. eo quo dictum eſt modo, videlicet diviſionis ope determinatum, atque limitatum, generare ac conſtituere proportionem geometricam, & ſi duas rationes quaſcumque geometricas, dummodo inter ſe ſimiles ſint invicem conferam, verbi gratiâ, rationem 12. ad 3.

ad 3. cum ratione 8. ad 2, etenim 12. per 3. aut 8. per 2. dividendo ſemper oritur numerus 4; hæc rationum geometricarum, ſimiliumque comparatio generat, atque conſtituit analogiſmum, ſive proportionem geometricam. XXXVII.

Ex his quæ de quantitatis naturâ huc uſque dicta ſunt, facilè colligitur ad theoriam, ſive ſpeculationem matheſeos univerſalis animo ritè percipiendam nihil aliud requiri quàm ut perfectam ambarum quantitatis ſpecierum, videlicet numeri, atque magnitudinis notitiam nobis comparemus: Deinde ut quantitatis in genere ſumptæ proprietates mente complectamur, quæ quidem proprietates ad ſex reduci ſuprà vidimus, nimirum ad æqualitatem, & inæqualitatem; commenſurabilitatem, & incommenſurabilitatem; proportionem, ac diſproportionem; & hinc axiomata deducamus, quæ poſteà pro fundamento argumentorum ad veritatem his in rebus indagandam neceſſariorum adhibere poſſimus. XXXVIII.

Nunc oſtenſis iis quæ ſpectant ad ſpeculationem univerſalis matheſeos, attingamus ea quæ ad ejus praxim requiruntur. Pauci numero ſunt, & valde ſimplices modi, quibus in matheſi analyticum, atque ſyntheticum opus omne peragitur, quos ratiocinio exquirere, atque enumerare facillimum eſt. Quicquid enim circa quantitates operaberis neceſſariò fiet aliquid eis addendo, aut aliquid ab eis detrahendo, quoniam quanti natura non ſinit, neque ſub imaginationem cadit aliud quid per quaſcumque operationes huic ſubjecto advenire poſſe quàm augmentum, aut decrementum. Jam verò in arithmeticis pro diverſa quantitatum oblatarum mole, atque habitudine, ac voluntate unam ab alia ſemel, vel multoties auferendi; in geometricis autem pro metamorphoſi, per quam magnitudines multiplicationis, atque diviſionis ope è genere ad genus aſcendentes, deſcendenteſve, ideſt modò plures, modò pauciores dimenſiones poſſidentes varias ſpecies induunt, ipſæ operationes, quamvis omnes augmenti, vel decrementi naturâ ſuâ participes, notabilem in forma varietatem ſuſcipiunt. Verbi gratiâ, propoſitis pluribus numeris inter ſe inæqualibus, quos in unum

Digitized by Google

colligere, ſive ſingulos ſingulorum incrementis augere eſt animus, operatio, ſive regula, per quam omnium ſimul ſumptorum valor habetur, Additio ſimpliciter dicitur; verùm quãdo æquales exiſtunt illi numeri qui proponuntur, ſive quando unicus, ſed aliquoties repetitus numerus objicitur, qui plurium vice conſideratur, oportetque ut priùs eorum ſummam quærere, poſito ſolùm unico ex datis illis numeris, invicem æqualibus, atque alio quoties primò poſitus accipi debeat indicante, poſtea certæ regulæ ope, à priori diverſæ, quæ multiplicatio vocatur, totum ex datorum numerorum ut partium collectione genitum elicitur, quæ regula nihil aliud eſt quàm additionis compendium; idem enim per additionem fieri poſſet, quod expeditius fit per multiplicationem. Pariter ſi propoſitis duobus inæqualibus numeris minorem à majori ſemel auferre velimus, regula per quam eorum differentia, ſive reſiduum manifeſtatur ſubtractionis, ſive ſubductionis nomen obtinet. At quando minorem numerum à majore non jam ſemel ut antè, ſed quoties poſſibile eſt detrahere jubemur, quamvis illum numerum, qui unitatibus ſuis denotat quoties minor in majore continetur, & qui propterea quotus nominatur, per crebas ſubductiones tandem reperire poſſemus, verumtamen faciliùs eadem operatio perficitur per alteram regulam, quam diviſionem appellamus. Similiter propoſitis aliquot magnitudinibus, ipſæ per additionem, atque ſubductionem mole creſcent, aut minuentur, at earum dimenſionum numerum augebit, vel contrahet multiplicatio, atque diviſio. Eſt adhuc peculiaris quædam diviſionis ſpecies, in qua unica quantitas datur, nimirum quando quotus diviſori æqualis eſſe debet. Atque hic dividendi modus extractio radicum dicitur, & in eo generaliter conſiſtit ut propoſita qualibet quantitate talis alia quantitas inveniatur, quæ aliquoties in ſe ducta quantitatem primò poſitam reſtituat, vel multò explicatius ut propoſita quælibet quantitas in tot dimenſiones æquales, quod quis juſſerit reſolvatur, atque una ex illis exhibeatur: Specialiter verò in arithmeticis, ut ex aliqua quantitate data talis

Digitized by Google

pars extrahatur, quæ in ſe aliquoties multiplicata illam quantitatem à qua educta eſt producat. Sic in univerſum ſive Arithmetica, ſive Geometrica ſpectes quinque numerari poſſunt operandi formæ, ſive regulæ, per quas omnis computandi ratio perficitur, ſive logiſtice generalis abſolvitur; Additio nimirum, Subductio, Multiplicatio, Diviſio, atque Radicum Extractio, quas omnes, ſi rem ſummo jure expendere velis, ad Subductionem, atque Additionem, tamquam ad duo genera, quorum aliæ regulæ ſpecies ſunt, reducere poſſis.

Quamobrem ſive praxim, ſive theoriam ſpectes, generalis mathematicarum diſciplinarum ſcientia paucis abſolvitur; naturâ enim atque generatione quantitatis, ejuſque ſpecierum, videlicet, multitudinis, ac magnitudinis ritè explicatis, in eſſentiam æqualitatis, & inæqualitatis diligenter inquiri debet; poſteà commenſurabilitatis, & incommenſurabilitatis fontes indagare, oſtendere; demum à quibus principiis proportionalitas improportionalitaſve oriatur conſiderare; ac deniqne omnium operationum, quæ circa quantitatem fieri poſſunt, videlicet Additionis, Subductionis, Multiplicationis, Diviſionis, & Radicum Extractionis artificium, uſum, ac proprietates exponere; & generales Canones efformare, à quibus velut ab uberrimis demonſtrationum fontibus expoſitarum rerum doctrina derivetur. Hic verus, & naturalis ordo ad perfectam harum ſcientiarum ſtructuram omninò neceſſarius eſt, quem tamen adhuc, ni fallor, obſervavit nemo, ſed quem ſequentes, ea quæ confusè tantùm alii docuerunt, nos perſpicuâ methodo trademus. Quum igitur hoc in capite dictarum quantitatis affectionum, necnon omnium operationum quæ circa quantitatem fieri poſſunt ortus atque generationes ſatis ſuperque oſtenderimus, conſequens eſſet, ut ſuſceptâ ſeorſim de ſingulis inſtitutione, neceſſaria de omnibus præcepta unde argumenta, concluſioneſque ad hanc materiam ſpectantes deduci poſſent, traderemus; verum quia jam aliqua tantum artis reſtauratæ ſpecimina dare volumus, ideò reliqua, quæ tamen hîc quaſi digito monſtravimus, in alio XXXIX.

opere dicturi, ſolumomdo proportionum fundamenta, & præcipua multiplicationis. atque diviſionis quantitatum ſymptomata, quæ maximè in uſum veniunt, adjungemus.

CAPUT SECUNDUM.

De Proportionibus. Fons Inventionis.

Quoniam ratio quælibet antecedentis per conſequentem diviſione reperitur, patet eas rationes invicem æquales eſſe, ac dici debere, quæ ſuorum antecedentium per proprios conſequentes diviſione quotos, ſive denominatores æquales ſortiuntur; illas verò inæquales, quarum antecedentes per proprios conſequentes ſigillatim diviſi diverſos quotos, ſive denominatores relinquunt: Et majorem quidem illam quæ per majorem quotum, minorem verò eam quæ per minorem quotum exhibetur. Deinde etiam manifeſtum eſt antecedentem terminum pro dividuo quodam haberi, cui conſequens tanquam diviſor ſupponitur. Unde fit juxta diviſionis leges ut cujuſlibet rationis quotus conſequentem terminum multiplicans, antecedentem quem diviſit reſtituat. Quapropter ſi proponatur anologiſmus quicumque, ſive ſeries duarum æqualium rationum geometricarum, verbi gratiâ, $A. B :: \alpha. \beta$; & ſit idem æqualium rationum quotus q, nimirum $\frac{A}{B}$ (q, & $\frac{\alpha}{\beta}$ (q; productis ſub communi quoto, & utriſque conſequentibus in antecedentium loca ſubſtitutis, hoc eſt mutatis tantum antecedentium nominibus poterit idem analogiſmus novâ ſub ſpecie ſic exhiberi $qB. B :: q\beta. \beta$. Deinde verò ad inveniendas tam rationis quàm analogiſmi proprietates omnes, & cætera ad proportionum materiam ſpectantia, nihil aliud agendum eſt quàm novos illos rationis ſive analogiſmi terminos modis omnibus tranſponere, atque transformare per additionem, ſubductionem, multiplicationem, diviſionem, radicum extractionem, ac per varias noviter repertorum æquipollentias ac interpretationes; aſcitis etiam quandoque ad id efficiendum externis quantitatibus; nam

ſi poſt has operationes eadem, quam ante fuerat, ratio remaneat: vel ſi termini tranſpoſitionem vel mutationem aliquam paſſi proportionales ſemper exiſtant (quod ſtatim antecedentis per conſequentem diviſione notum fiet) modus erit inventus rationem, vel analogiſmum conſervandi; ſin minùs, deſtruendi.

DE MODIS ANALOGISMVM CONSERVANDI.

INVESTIGATIO I.

Exponantur duæ rationes A. B. & C. D, eidem rationi α. β. ſigillatim æquales: ſic A. B. :: α. β : : C. D.

Quoniam ex hypotheſi A. B :: α. β. ergo per æqualium rationum notionem atque definitionem (ſicut in inventionis fonte dictum eſt) erit $\frac{A}{B}$ (q. & $\frac{\alpha}{\beta}$ (q. Atqui per eandem rationem fit $\frac{\alpha}{\beta}$ (q. & $\frac{C}{D}$ (q. Quare cùm ſit $\frac{A}{B}$ (q, & $\frac{C}{D}$ (q. Ideo,

INVENTUM I.

A. B :: C. D.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Rationes eidem rationi æquales inter ſe æquantur.

INVESTIGATIO II.

A.
B, C, D

Exponantur quotcumque quantitates B, C, D. invicem æquales, & ſit alia quævis quantitas A.

Vnaquâque datarum quantitatum B, C, D per eundem diviſorem A diviſâ: vel eâdem quantitate A, per ſingulos diviſores B, C, D ſectâ, æquales quotos ſemper prodire neceſſe eſt, propter poſitam repetiti diviſoris A identitatem, & dividuorum B, C, D æqualitatem: vel propter poſitam repetiti dividui A identitatem, & diviſorum B, C, D æqualitatem. Quare per rationum æqualium definitionem.

INVENTUM II.

A. B :: A. C :: A. D atque etiam B. A :: C. A :: D. A.

QVOD SIC ENUNCIATUR.

Eadem quantitas ad plures æquales collata , ſicut plures quantitates æquales ad eandem comparatæ quantitatem, rationem habent æqualem.

INVESTIGATIO. III.
PER PROPORTIONALEM ADDITIONEM.

Expo natur analogiſmus quicumque $A . B :: \alpha . \beta$, qui (ut in inventionis fonte dictum eſt) novâ ſub ſpecie ſic exhibeatur $qB . B :: q\beta . \beta$.

Quoniam $\frac{qB}{B}$ (q, vel $\frac{\alpha}{\beta}$ (q,atque etiam $\frac{qB+q\beta}{B+\beta}$ (q,nam $q \times B + \beta \sqcap qB + q\beta$, & $q \times B \sqcap qB$, vel $q \times \beta \sqcap q\beta$.

ERGO INVENTUM I.

$qB + q\beta . B + \beta :: qB . B :: q\beta . \beta$. Ideſt $A + \alpha . B + \beta :: A . B :: \alpha . \beta$.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

1°, Si quantitates A & B rationem quamlibet geometricam continentes augeantur quantitatibus α & β (antecedens quidem antecedente , conſequens verò conſequente) inter quas α & β eadem ratio cadat quam quæ inter A & B reperitur; itaut auctæ fiant $A + \alpha$ & $B + \beta$. Erit ut ſimplex A ad ſimplicem B, ſic aucta $A + \alpha$ ad auctam $B + \beta$, quare:

A proportionali terminorum augmento , ratio , atque adeò proportio non mutatur.

2°, *Si ſint quotlibet rationes æquales* $A . B :: \alpha . \beta$. *(nam quando plures eſſent eodem modo procederet argumentatio), ut unus terminus antecedens ad ſuum conſequentem, ſic ſumma omnium antecedentium ad ſummam omnium conſequentium.*

COROLLARIUM.

Quare ſi in una quantitatis ſpecie , videlicet in numeris abſolutis , minimi cujuſlibet rationis termini exiſtant, qui ſint A & B, quoniam $A . B :: A . B$. ergo per probata.

Digitized by Google

(A + A П) 2A. (B + B П) 2 B :: A. B. & erunt termini 2A & 2B proxime majores, eandem quam minimi A & B rationem continentes, quoniam minimo proportionali augmento crevêre. Deinde quia 2A. 2B :: A. B. ergo etiam per probata 3A. 3B :: A. B, eruntque termini 3A. & 3B. proxime majores, eandem qûam ipſi 2A. & 2B, vel ipſi A. & B. rationem continentes, quoniam minimo proportionali augmento rurſus crevêre, atque eo deinceps progreſſu. Igitur:

In numeris duo cujuſlibet rationis termini aut minimi ſunt hujus rationis termini, aut horum minimorum æquimultiplices.

INVESTIGATIO IV.

PER PROPORTIONALEM SUBDUCTIONEM.

Iiſdem ut priùs poſitis nimirum A. B :: α. β, ideſt qB. B :: qβ. β.

Quoniam $\frac{qB-q\beta}{B-\beta}$ (q, & $\frac{qB}{B}$ (q, vel $\frac{q\beta}{\beta}$ (q. Nam ut prius idem quotus q, diviſores B−β & B vel β multiplicans dividua qB−qβ & qB. vel qβ reſtituit. Ergo:

INVENTUM II.

qB−qβ. B−β :: qB. B :: qβ. β. ideſt A−α. B−β :: A. B :: α. β.

QUOD SIC INTERPRETARI LICET.

1°, Si quantitates A. & B. rationem quamlibet geometricam cōtinentes minuantur quantitatibus α. & β, inter quas ablatitias eadem ratio cadat quam quæ inter totales A. & B. reperitur; itaut reſiduæ fiant A−α & B−β; erit ut tota A. ad totam B ſic reſidua A−α ad reſiduam B−β. Quare:

A proportionali terminorum decremento ratio, atque adeo proportio non mutatur.

Etſi to torum & ablatorum una eademque ratio fuerit, eadem erit & reliquorum.

Vel aliis verbis; *Si tota partibus ſibi proportionalibus mulctentur, reſidua totis, vel ablatis proportionalia ſunt.*

2°, *Si ſint quotlibet rationes æquales* A. B. :: α. β. (*nam*

quando plures eſſent eodem modo procederet argumentatio) ut unus terminus antecedens ad ſuum conſequentem, ſic differentia omnium antecedentium ad differentiam omnium conſequentium.

INVESTIGATIO V.

PER COMMUNEM MULTIPLICATOREM.

Exponatur ratio quælibet (geometricam ſemper intelligo) terminis A. & B. expreſſa, quorum uterque per eandem, C. multiplicetur, ita ut producta fiant AC. & BC.

Quoniam $\frac{AC}{BC} (\frac{A}{B}$ & $\frac{A}{B} (\frac{A}{B}$ nam ut prius idem quotus $\frac{A}{B}$ diviſores B C & B multipicans dividua A C & A reſtituit. Ergo per inventionis fontem.

INVENTUM III.

AC. BC :: A. B.

QUOD SIC INTERPRETARI LICET.

1° *A communi multiplicatore ratio vel proportio non mutatur.*
Vel; *Si eadem quantitas duas alias multiplicet productæ quantitates multiplicatis proportionales erunt.*

INVESTIGATIO. VI.

PER COMMUNEM DIVISOREM

Exponatur ut prius ratio quælibet terminis A. & B. expreſſa, quorum uterque per eandem, d, dividatur, itaut quoti fiant $\frac{A}{d}$ (x & $\frac{B}{d}$ (y.

Quoniam quoti x & y eumdem diviſorem d, multiplicantes dividua A. & B. reſtituunt. Ergo:

INVENTUM. IV.

A. B. (ηxd. yd) :: x. y.

QUOD SIC INTERPRETARI LICET.

A communi diviſore ratio, atque adeo proportio non mutatur

Digitized by Google

tatur: vel aliis verbis; *Si duæ quantitates per eandem dividantur, ratio quotorum eadem eſt quàm quantitatum diviſarum.*

2°, Quia A. B :: x. y. Id eſt ratio A. d. ad rationem B. d, quoniam binæ illæ rationes per quotos x & y earum indices ſigillatim ſignificantur. Ergo,

Binæ rationes (A. d & B. d) *eundem conſequentem* (d) *habentes ſunt inter ſe ut directo ordine ſumpti antecedentes* (A. B.)

COROLLARIUM I.

Hinc facilè demonſtratur Regula additionis, & ſubductionis fractionum diverſas, denominationes habentium.

Sunto enim duæ diverſæ denominationis fractiones $\frac{n}{d}$ & $\frac{N}{D}$, quas in unam colligere, vel unam ab alia ſubducere velimus.

Regula docet harum fractionum ſummam, vel differentiam eſſe $\frac{nD \pm Nd}{dD.}$

Quoniam verò nD. dD :: n. d, atque etiam Nd. dD :: N. D. Ergo $\frac{nD}{dD} \Pi \frac{n}{d}$, & per eandem rationem $\frac{Nd}{dD} \Pi \frac{N}{D}$ conſequenter igitur $\frac{nD \pm Nd}{dD} \Pi \frac{n}{d} \pm \frac{N}{D}$: ut erat oſtendendum.

COROLLARIUM. II.

Hinc etiam demonſtrantur Regulæ multiplicationis, atque diviſionis fractionum.

Nam 1°, Sunto duæ fractiones $\frac{n}{d}$ & $\frac{N}{D}$, quas inter ſe multiplicare velimus.

Regula docet harum fractionum productum eſſe $\frac{nN}{dD}$.

Jam ſi Regula bona eſt fieri debet ex multiplicationis naturâ 1. $\frac{n}{d}$ :: $\frac{N}{D}$. $\frac{nN}{dD}$, & utriuſque propoſitæ fractio-

nis tam denominatoribus, quàm numeratoribus in denominatorem producti, videlicet dD ductis, poſitoque $\frac{dD}{dD}$ pro unitate, ſuperior quantitatum ſeries mutatis tantùm propoſitarum fractionum, & unitatis nominibus novâ ſub ſpecie ſic exhibebitur $\frac{dD}{dD}.\ \frac{nD}{dD} :: \frac{Nd}{dD}.\ \frac{nN}{dD}$. Et quia per probata $\frac{dD}{dD}.\ \frac{nD}{dD}$ :: dD. nD, atque etiam $\frac{Nd}{dD}.\ \frac{nN}{dD}$ :: Nd. nN, eſtque $\frac{dD}{dD}$ unitas, erit igitur dD. nD :: Nd. nN, & productum ſub extremis dDnN Π nDNd producto ſub mediis. Quod cùm verum ſit ſequitur 1. $\frac{n}{d} :: \frac{N}{D}.\ \frac{nN}{dD}$ verum eſſe analogiſmum, & $\frac{nN}{dD}$ productum eſſe fractionum $\frac{n}{d}$ & $\frac{N}{D}$ invicem multiplicatarum, atque adeò traditam Regulam bonam eſſe.

Simili prorſus argumentatione demonſtrabitur legitimam eſſe traditam de fractionum diviſione Regulam.

INVESTIGATIO V.

PER OMNIMODAM QUOTLIBET QUANTITATUM INTER SE MULTIPLICATIONEM.

1°, Sunto duæ quælibet quantitates A & B, quæ ſe invicem modis omnibus multiplicent, itaut producta fiant AB, & BA.

Si A Π B manifeſtum eſt AB Π BA ob invariabilem æqualitatis naturam; ſed ſi alterutra puta B F A, itaut earum differentia ſit E, erit B—E Π A, & A + E Π B.

Jam quia A + E Π B, igitur utrâque æqualitatis parte per eandem A multiplicata, productum (A × A + E Π) + AA + AE Π AB.

Sed etiam B − E Π A, igitur utrâque æqualitatis parte per eandem B multiplicata, factum (B × B − E Π) + BB − BE Π BA.

Productum autem $(A + E \times A + E \sqcap) + A^2 + 2AE + E^2 \sqcap + BB$, & productum $(A + E \times - E \sqcap - AE - EE \sqcap) - BE$. Atque horum productorum ſumma $AA + AE \sqcap (+ BB - BE \sqcap) + BA$, conſequenter igitur $AB \sqcap BA$.

OPERATIO TALIS EST.

MULTIPLICATIONES.

1ª	2ª	3ª	4ª	
$A + E \sqcap + B$	$+ B - E \sqcap A$	$- E$	$+ A + E \sqcap + B$	
$\times A$	$\times B$	$\times A + E \sqcap + B$	$\times + A + E \sqcap \times B$	
$+ A^2 + AE \sqcap + AB$	$+ BB - BE \sqcap + BA$	$- AE - E^2 \sqcap - BE$	$+ A^2 + 2AE + E^2 \sqcap + B^2$	Additio.
			$- AE - E^2 \sqcap - BE$	

Summa $+ A^2 + AE \sqcap (+ B^2 - BE \sqcap) + BA \sqcap + AB$.

2°, Tres quantitates A, B, C, modis omnibus ſe invicem multiplicando producant ABC, ACB, BCA, BAC, CAB, CBA.

Ex demonſtratis $BC \sqcap CB$.

Ergo $A \times BC \sqcap A \times CB \sqcap BC \times A$.

Pari ratione $CA \sqcap AC$.

Ergo $B \times AC \sqcap CA \times B$.

Sed etiam $AB \sqcap BA$.

Igitur $C \times AB \sqcap C \times BA$. Omnia igitur enata producta æquantur inter ſe.

Simili prorſus argumentatione probabitur quatuor, vel plurium quantitatum quocumque ordine ſumptarum producta inter ſe æquari, nam ſemper in aliquot earum productis tres termini (ſi quatuor adſint quantitates, vel quatuor termini, ſi propoſitæ quantitates quinque numero exiſtant, & ſic in infinitum) ſimiles ſe invicem multiplicabunt, quorum facta inter ſe æquabuntur, ut jam concluſum eſt; ideoque licet quarta, vel ulterior quantitas reſidua talia facta multiplicet, ſive ab eis multiplicetur, genita ab his multiplicationibus producta inter ſe æquari neceſſe eſt. Quare

Inventum. V.

Si plures quantitates ſe invicem multiplicent producta ſunt æqualia quocumque quantitatum ordine multiplicatio fiat.

Demonstratio particularis in Numeris.

Ex numero A in numerum B fiat A B, & ex numero B in numerum A fiat B A. Dico A B п B A.

Ex multiplicationis, & numerorum naturâ productus numerus A B conſtat ex multiplicato numero B toties poſito, quot ſunt in multiplicante A unitates. Unde ſi ex ſingulis numeris B, in producto AB contentis ſumatur unitas, ſumptarum unitatum multitudo æquabitur unitatum in numero A contentarum multitudini, hoc eſt ſumptarum unitatum aggregatum æquabitur numero A. Toties autem ſumi poterit illud aggregatum quot ſunt in numero B unitates. Sed in producto numero BA multiplicatus numerus A toties continetur, quot ſunt in multiplicante B unitates, ex multiplicationis naturâ, ergo productus numerus BA æquatur producto numero AB, ſicut erat oſtendendum.

Investigatio VI.

Per mutuam terminorum analogiſmum efficientium multiplicationem.

Poſito ut priùs qB. B :: qβ. β. extremos terminos invicem, & medios etiam inter ſe multiplcando, fit

Inventum VI.

qB β п Bqβ. per mox probata.

Quod sic enunciatur.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint, productum ſub extremis æquatur producto ſub mediis.

Digitized by Google

ALIA EJUSDEM REI DEMONSTRATIO.

Eſto A. B :: α. β. ergo $\frac{A}{B} \sqcap \frac{\alpha}{\beta}$ & utramque æqualitatis partem per Bβ multiplicando fit $\frac{AB\beta}{B} \sqcap \frac{\alpha B\beta}{\beta}$ ideſt A$\beta \sqcap \alpha$B. ut erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Itaque cognitis analogiſmi tribus terminis quibuſcumque quartus invenietur.

1°, Si duo medii dentur cum uno extremorum, invenietur alter extremus multiplicando duos medios inter ſe, & productum dividendo per datum extremum; quotus enim ex hac diviſione proveniens æquabitur alteri extremo.

Verbi gratiâ, detur A.B :: C.O, ſitque O, ignotus terminus, fiet $\frac{BC}{A} \sqcap$ O. &. erit A.B :: C. $\frac{BC}{A}$. Nam productum ſub extremis $\frac{BCA}{A} \sqcap$ B C producto ſub mediis. Etenim $\frac{BCA}{A} \sqcap$BC. Atque hæc 1ª. corollarij pars fundamentum eſt Regulæ trium directæ.

2°, Si dentur duo extremi cum uno mediorum, alter medius invenietur productum ex multiplicatione extremorum dividendo per datum medium. Nam quotus ex hac diviſione proveniens æquabitur alteri medio.

Verbi gratiâ; Detur A. B :: O. D. erit o ignotus terminus æqualis $\frac{AD}{B}$, unde naſcetur integer analogiſmus A. B :: $\frac{AD.}{B}$ D. Nam AD$\sqcap \frac{ADB.}{B}$ Atque hæc 2ª. corollarii pars fundamentum eſt Regulæ trium everſæ.

3°, Vel ſi datis duabus quantitatibus tertiam proportionalem adjungere velimus, multiplicabimus 2ᵃᵐ in ſe,

& productum dividemus per 1^{am}; aç quotus ex hac diviſione proveniens erit 3^a. proportionalis quæſita.

Veluti ſi dentur duæ quantitates A & B. fiat $\frac{BB}{A}$, & erunt A. B. $\frac{BB}{A}$ $\div\!\div$ nam $\frac{BBA}{A}$ ⊓ B B.

4°. Vel tandem ſi datis duobus extremis quæratur medius proportionalis. Multiplicari debent inter ſe dati extremi, & producti radix ſubæquibimenſa erit medius quæſitus.

Nam radix ſubæquibimenſa ſeipſam multiplicans dat ſuum æquibimenſum, ſive productum ſub extremis.

APPENDIX I.

Ex continuatâ methodo tertiam proportionalem ad duas datas quantitates adjungendi patet inventio Meſolabii, ſive inventio quotlibet mediarum continuè proportionalium inter duas datas quantitates, puta inter A & B.

Nam quia A. B. $\frac{BB}{A}$. $\div\!\div$ & eâdem methodo A.B. $\frac{B^2}{A}$ $\frac{B^3}{A^2}$ $\div\!\div$ Atque etiam A. B. $\frac{B^2}{A}$. $\frac{B^3}{A^2}$. $\frac{B^4}{A^3}$ $\div\!\div$ & ſic in infinitum; omnibuſque $1^{\rm e}$ quantitatum ſeriei terminis per A. $2^{\rm e}$ per A^2. $3^{\rm e}$ per A^3 multiplicatis fit A^2. AB. B^2 $\div\!\div$, & A^3. A^2B. AB^2. B^3 $\div\!\div$, Atque etiam A^4. A^3B. A^2B^2. AB^3. B^4 $\div\!\div$ Itaque.

REGULA.

Si inter duas quaſcumque quantitates puta A & B unum medium proportionale reperire velim, unamquamque attollam ad 2^{am} poteſtatem, ut fiat A^2 & B^2 inter quas cadet unum medium proportionale A B. Si verò duo media proportionalia reperire velim, ipſarum A & B. tertias poteſtates ſumam, nimirum A^3 & B^3, inter quas cadent duo media proportionalia A^2B & AB^2 &c: uno verbo ut habeātur tot media proportionalia, quot quis voluerit inter duas datas quantitates, debent ipſæ ad eos gradus attolli, quorum index unitate

excedit numerum quæſitorum mediorum. Nam ex dicta methodo plures quantitates continuè proportionales inveniendi manifeſtum fit inter duo æquibimenſa cadere unum medium proportionale, ac inter duo æquitrimenſa duo media proportionalia reperiri, & ſic in infinitum. Jam verò quoniam quæ ſunt proportionalia poteſtate, ſunt etiam proportionalia radice; ſumptis igitur tam ipſarum poteſtatum, quàm mediorum proportionalium radicibus, ab ipſarum poteſtatum gradu denominatis optatum habebitur. Nam quia eſt $A^2 . AB . B^2 \div$ ergo $A . \sqrt{AB} | . B \div$ vel quia $A^3 . A^2B . AB^2 . B^3 \div$ ergo $A . \sqrt[3]{A^2B} | . \sqrt[3]{AB^2} | . B \div$, & eo deinceps progreſſu.

APPENDIX II.

Hinc & ex quatuor primis inventis methodus elicitur datam quamlibet rationem majoribus, vel minoribus terminis, quam ii, quibus ipſa continetur ad, libitum exprimendi, idque duobus modis.

Detur enim quælibet ratio A. B.

1°, Sumptâ quâlibet quantitate α, fiat $A . B :: \alpha . \beta$. ſive tribus A, B, α inveniatur 4^a. proportionalis β. & erit per 1um. inventum $A . B :: A \pm \alpha . B \pm \beta$.

2°, Poſitâ eadem ratione A. B. ducatur uterque terminus A & B in eandem quantitatem D. fietque $AD . BD :: A . B$. per inventum 3um.

Vel dividatur uterque terminus A & B per eandem C, & habebitur $\frac{A}{C} . \frac{B}{C} :: A . B$ per mox probata.

APPENDIX. III.

Jam facilè eſt efficere ut duarum magnitudinum cujuſcumque generis illæ ſint, modo in unâ totidem dimenſiones ſint quàm in altera, proportio in rectis lineis conſpiciatur.

Sunto enim duæ plurimenſæ magnitudines ABC, & DEF.

Inter A & B reperiatur media proportionalis, quæ vocetur M, unde erit $A . M . B \div$, & conſequenter

MMΠAB, Atque ſic M²CΠABC. Poſtea fiat M.D::E.G. ergo MGΠDE. unde erit MGFΠDEF. ultimo fiat M.G::F.K. ergo MKΠGF, & conſequenter MMKΠDEF. Quare MMC. MMK :: C.K. Eâdem prorſus methodo duorum quorumlibet plurimenſorum ſimilium ratio in rectis lineis exhibebitur. Qua de re plura verba fecimus initio libri ſecundi, cùm de compoſitionis, & reſolutionis methodo diſſeruimus.

COROLLARIUM II.

Eſto ADΠBC. ex invento 4° fit A. B :: AC. (BCΠ) AD :: C. D. ergo A. B :: C. D. Quare

Si quatuor quantitates fuerint (A, B, C, D) *& productum extremarum* ADΠBC *producto mediarum*, *illæ quatuor quantitates erunt proportionales.*

COROLLARIUM. III.

Eſto $\frac{A}{B}$ (x, & $\frac{A}{C}$ (y. ergo BX Π (A Π) cy, & hanc æqualitatem producti ſub extremis cy cum producto ſub mediis BX in proportionem reſolvendo habetur C. B :: X. Y. Ergo:

Si eadem quantitas A, *per duas alias* B & C *dividatur*, *& diviſionum quoti ſint* X & Y. *Ut quoti ad invicem* nempe X & Y *ſic ſe habent inverſo ordine ſumpti diviſores* C. B.

Vel brevius; *Ejuſdem quantitatis per duas diviſæ quoti ſic ſe habent ad invicem ut inverſo ordine ſumpti diviſores.*

2°, Si ſint duæ rationes A. B & A. C. eundem antecedentem A habentes, erit ut ratio A. B ad rationem A. C (hoc eſt ut quotus X ad quotum Y) ſic inverſo ordine ſumpti conſequentes C. B.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Binæ rationes eundem antecedentem habentes ſunt inter ſe ut reciprocè ſumpti conſequentes.

COROLLARIUM IV.

Hinc, & ex probatis ab initio liquet inventio ſummæ omnium

omnium terminorum continuæ proportionis geometricæ.

Nam eſto quælibet ſeries, cujus duo primi termini ſint α, β, ultimus terminus ω, ſumma verò omnium terminorum quæſita z, ſumma omnium antecedentium erit $z - \omega$ & $z - \alpha$. ſumma omnium conſequentium.

Quare per 1um Inventum fit $\alpha . \beta :: z - \omega . z - \alpha$ & per ultimò repertum $\alpha z - \alpha\alpha \; \Pi \; \beta z - \beta\omega$, ac per antitheſim $+ \beta z - \alpha z \; \Pi + \beta\omega - \alpha\alpha$, & utraque æqualitatis parte per $\beta - \alpha$ diviſa oritur $+ z \; \Pi + \frac{\beta\omega - \alpha\alpha}{\beta - \alpha}$ unde elicitur

HÆC REGULA. *Si productum ſecundi, & ultimi termini æquibimenſo primi multatum dividatur per differentiam primi, & ſecundi, quotus inde proveniens æquabitur ſummæ omnium terminorum continuæ proportionis geometricæ.*

COROLLARIUM V.

Exponantur quotlibet quantitates A, B, C.

Fiat $\frac{A}{B}$ (E & $\frac{B}{C}$ (H atque $\frac{A}{C}$ (K. Ergo BE Π (AΠ) CK: & hanc æqualitatem in proportionem reſolvendo habetur B. C :: K. E. Ergo $\frac{B}{C}$ (H & $\frac{K}{E}$ (H. Ergo K Π EH.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si fuerint quotlibet quantitates A, B, C, *ratio extremarum* A. C *videlicet quotus* K, *eam ſignificans, æquatur intermediis rationibus* A. B & B. C. *invicem multiplicatis, nimirum quotorum producto* EH, *has medias rationes exhibentium.*

APPENDIX.

Quare ſi fuerint duo quilibet proportionalium quantitatum ordines, quæ binæ in eâdem ratione ſumantur, ex æquo proportionales erunt

Nam ſemper in utrâque proportionalium ſerie, æquales, & numero totidem intermediæ rationes exiſtent, ergo extremarum rationes, quæ rationibus intermediis, quovis ordine inter ſe multiplicatis æquales ſunt, ſive ordinata, ſive perturbata fuerit proportio, inter ſe æquari neceſſe eſt.

Digitized by Google

Verbi gratiâ, { I. Ordo directus A.B.C. { & ſit A. B :: D.F,
{ II. Ordo directus D.F.G. { Item B.C :: F.G.

Ergo $\frac{A}{B}$ (q $\frac{B}{C}$ (X } Jam ex demonſtratis productum qX index eſt tam rationis A. C. quàm rationis D. G.
$\frac{D}{F}$ (q $\frac{F}{G}$ (X } Ergo A. C :: D. G.

Deinde, { I. Ordo directus B.C. D. } & ſit B. C :: β. γ.
{ II. Ordo turbatus δ. β. γ. } Item C. D :: δ. β.

Ergo $\frac{B}{C}$ (q $\frac{C}{D}$ (X } Quia productum qX index eſt rationis B. D productum verò Xq. index eſt rationis δ. γ. & ex demonſtratis qX Π Xq; idcirco B.D :: δ.γ.
$\frac{\beta.}{\gamma.}$ (q $\frac{\delta.}{\beta}$ (X }

COROLLARIUM VI.

Hinc generalis methodus elicitur quotlibet rationes inter ſe componendi, vel unam ad aliã ſubducendi, idque duobus modis.

Etenim dentur duæ quælibet rationes A. B, & C. D. quas in unam colligere velimus.

1° Fiat C. D :: B. E. & ratio A. E æquabitur rationibus intermediis A. B + (B. E Π) C. D.

Vel fiat H. A :: C. D : & ratio H. B. æquabitur rationibus intermediis (H. A Π) C. D + A. B.

2° Iiſdem poſitis rationibus A. B, & C. D. Fiat AC, BC, BD.

Ergo AC. BC :: A. B. nec non BC. BD :: C. D. per inventum 4um.

Ergo ratio extremarum AC. BD. æquatur rationibus intermediis (AC. BC. + BC.BD Π) A.B + C. D.

QUOD SIC ENUNCIATUR

1° *Si fiat ut antecedens terminus unius rationis ad ſuum conſequentem, ita alterius rationis conſequens ad aliam*

Digitized by Google

quantitatem, vel ita alia quantitas ad alterius rationis antecedentem; ultimò ſumptæ rationis antecedens ad inventam quantitatem, vel inventa ad ultimò ſumptæ rationis conſequentem, rationem habebit ex propoſitis rationibus compoſitam.

2° *Ratio producti antecedentium ad productum conſequentium componitur ex datis rationibus.*

Jam verò ſi proponantur duæ quælibet rationes A. B & C. D. ſitque ratio C. D ſubducenda ex ratione A. B.

1°, Fiat A. E. :: C. D, & habebitur A. E. B. Ergo ratio extremarum A. B æquatur rationibus intermediis (A. E ::) C. D + E. B. Quare ratio E. B. eſt propoſitarum rationum differentia.

2°, Poſitis iiſdem rationibus A. B. & C. D. Fiat AC. AD. BC.

Jam AC. BC :: A. B, & AC. AD :: C. D. Ergo extremarum ratio (AC. BC ::) A. B :: (AC. AD ::) C. D + AD. BC. Quare ratio AD. BC eſt datarum rationum differentia.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

1°, *Si fiat antecedens terminus illius rationis, à qua altera data ratio ſubducı debet, ad aſcititiam quantitatem, ut eſt antecedens ſubducendæ rationis ad ſuum conſequentem, ratio aſcititiæ quantitatis ad 1° ſumptæ rationis conſequentem erit quæſita datarum rationum differentia.*

2°, *Si dentur duæ quæcumque rationes, ratio producti ſub extremis terminis ad productum ſub mediis eſt datarum rationum differentia.*

APPENDIX. I.

Quare ſi duo diverſi dentur Analogiſmi, verbi gratiâ,

A. B :: $\alpha. \beta.$

&

D. E :: $\delta. \epsilon.$

Erit per mox probata (A. B + D. E Π) AD. BE :: ($\alpha. \beta. + \delta. \epsilon\, \Pi$) $\alpha\delta. \beta\epsilon.$

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si proportionalia per proportionalia multiplicentur, facta ſunt proportionalia.

APPENDIX. II.

Et ſi ſint $\left\{\begin{matrix} A.\ B :: \alpha.\ \beta. \\ C.\ D :: \delta.\ \epsilon. \end{matrix}\right\}$ fiat $\frac{A}{C}($ X, $\frac{B}{D}$ Y, $\frac{\alpha}{\delta}($ q, $\frac{\beta}{\epsilon}($ H.

Ergo XC. YD : : qδ. Hϵ, Si quidem ſunt ipſæmet quantitates analogiſmi A. B : : α. β. ſed alio modo denominatæ, per diviſionis leges.

Atqui ratio XC. YD ⊓ rationibus X. Y + C. D, per antè probata;

Ratio verò qδ. Hϵ ⊓ rationibus q. H + δ. ϵ.

Ergo ab æqualibus rationibus XC. Yδ : : qδ. Hϵ ſubductis utrimque æqualibus C. D & δ. ϵ; (nam ex hypotheſi C. D : : δ. ϵ) reliqua ratio X. Y reliquæ rationi q. H æqualis erit.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si proportionalia per proportionalia dividantur, orta ſunt proportionália, ſive quoti ſunt proportionales.

APPENDIX III.

Atque hinc ſequitur, quæ ſunt proportionalia radice eſſe proportionalia ſimili poteſtate, & contra.

Nam, verbi gratiâ, A^2. B^2 ⊓ A. B + A. B, &c. A^3. B^3 ⊓ A. B + A. B + A. B &c.

APPENDIX IV.

Hinc etiam ſequitur non ſolùm æquibimenſa eſſe in ratione duplicata ſuorum laterum, æquitrimenſa verò in ratione triplicata ſuorum etiam laterum, ut oſtenſum eſt, ſed etiam generaliter omnia plurimenſa ſimilia eſſe in ratione homologorum laterum, æquimultiplicata numero dimenſionum, ex quibus componuntur.

Verbi gratiâ, ſunto duo quadrimenſa ABCD & EFGH, quorum homologa latera ſint in ratione R. S.

$$\text{Quia}\left\{\begin{array}{l} A.\ E :: R.\ S. \\ B.\ F :: R.\ S. \\ C.\ G :: R.\ S. \\ D.\ H :: R.\ S. \end{array}\right\}\text{ erit per multiplicationem } ABCD.\ EFGH :: R^4.\ S^4.$$

APPENDIX V.

Hinc etiam ſequitur ſi plures quantitates ſint proportionales, ut eſt prima ad ultimam, ſic eſſe poteſtatem primæ æquimultiplicatam numero terminorum minus uno ad poteſtatem ſimilem ſecundæ.

Verbi gratiâ, ſunto A. M. N. E $\div\!\!\div$.

$$\text{Quia}\left\{\begin{array}{l} A.\ M :: A.\ M \\ M.\ N :: A.\ M \\ N.\ E :: A.\ M \end{array}\right\}\text{ erit per multiplicationem } (AMN.\ MNE ::)\ A.\ E :: A^3.\ M^3.$$

APPENDIX VI.

Quare Methodus habetur datâ quantitate, ſive unius, ſive plurium dimenſionum ſimilem inveniendi, ad quam propoſita quantitas datam teneat rationem: verbi gratiâ z. f.

1°, Si detur A; Fiat z. f :: A. B, & erit B. quantitas quæſita.

2°, Si detur A^2, inter z & f quæratur media proportionalis, quæ ſit m, itaut fiat z. m. f $\div\!\!\div$; Deinde ponatur z. m :: A. D: ergo $A^2.\ D^2 :: (z^2.\ m^2 ::)$ z. f, ergo D^2. eſt quantitas quæſita.

3°. Si detur A^3. inter z & f quærantur duæ mediæ proportionales, puta n, p. itaut fiat z. n. p. f $\div\!\!\div$ Deinde ponatur z. n :: A. C, ergo $A^3.\ C^3 :: (z^3.\ n^3 ::)$ z. f. Igitur C^3 eſt quantitas quæſita.

Eodem modo in altioribus gradibus argumentari licet, ut manifeſtum eſt.

Quod ſi datæ rationis termini plures haberent dimenſiones, priùs oporteret per ea, quæ ad finem inventi 4ti. tradita ſunt, efficere ut datorum terminorum ratio in rectis lineis conſpiceretur.

Quod ſi z ſit 1, f. verò 2, vel 3. &c. per traditam methodum habebitur cubi, ut vocant, vel aliæ cujuſlibet poteſtatis duplicatio, triplicatio &c.

DE RELIQUIS MODIS ARGUMENTANDI PER PROPORTIONES.

Poſito ut prius Analogiſmo A. B : : α. β, vel quod idem eſt qB. B : : qβ. β.

1°, Quia $\frac{B}{qB} (\frac{1}{q}$, & $\frac{\beta}{q\beta} (\frac{1}{q}$; nam $\frac{1}{q} \times \frac{qB \sqcap B.}{q\beta \sqcap \beta.}$, ergo per æqualium rationum definitionem fit B. qB : : β. qβ, ideſt B. A : : β. α.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si quatuor quantitates directè proportionales fuerint; etiam inversè proportionales erunt.

2°, Quia $\frac{qB}{q\beta} (\frac{B}{\beta}$, & $\frac{B}{\beta} (\frac{B}{\beta}$. Ergo qB. q$\beta$: : B. β. vel brevius per 3um inventum, quia à communi multiplicatore ratio non mutatur, erit qB. qβ : : B. β. ideſt A. α : : B. β.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si quatuor quantitates directè proportionales fuerint; etiam alternè proportionales erunt.

ALIA EJUSDEM REI DEMONSTRATIO.

Eſto ut prius A. B : : α. β. tranſpoſitis mediis terminis erit adhuc A. α : : B β. Nam ſemper productum extremorum A $\beta \sqcap \alpha$ B producto mediorum.

Hæc demonſtratio quamvis rectè concludat, tamen rei cauſam, ſive cur res ita ſit non declarat.

3°, Quia $\frac{qB \pm B}{B} (q \pm 1$, & $\frac{q\beta \pm \beta}{\beta} (q \pm 1$. Nam $q \pm 1 \times \frac{B \sqcap qB \pm B.}{\beta \sqcap q\beta \pm \beta.}$ Ergo qB $\pm$ B. B : : q$\beta \pm \beta$. β. ideſt A $\pm$ B. B : : $\alpha \pm \beta$. β.

ALIA EJUSDEM REI DEMONSTRATIO.

Ex hypotheſi eſt A. B : : α. β. & alternè A. α : : B. β. ergo per primum & 2um. inventum A $\pm$ B. $\alpha \pm \beta$: : (A. α : :) B. β, & alternè A $\pm$ B. B : : $\alpha \pm \beta$. β.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint, etiam directè componendo, vel dividendo proportionales erunt.

4°, Quia $\frac{qB \pm q\beta}{q\beta}$ ($\frac{B \pm \beta}{\beta}$, & $\frac{B \pm \beta}{\beta}$ ($\frac{B \pm \beta}{\beta}$. Nam $\frac{B \pm \beta}{\beta}$ $\times^{q\beta\, \pi\, qB \pm q\beta.}_{\beta\, \pi\, B \pm \beta.}$ Ergo $qB \pm q\beta.\ q\beta :: B \mp \beta.\ \beta.$ ideſt $A \pm \alpha.\ \alpha :: B \pm \beta.\ \beta.$

ALIA EJUSDEM REI DEMONSTRATIO.

Quia eſt $A.B :: \alpha.\ \beta.$ & alternè $A.\alpha :: B.\ \beta ::$ Ergo directè componendo, vel dividendo fit $A \pm \alpha.\ \alpha :: B \pm \beta.\ \beta.$

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si quatuor quantitates directè proportionales fuerint, etiam alternè componendo, vel dividendo proportionales erunt.

5°, Quia probatum eſt $A+B.\ \alpha+\beta :: (B.\beta ::)\ A-B.\ \alpha-\beta.$ ergo alternè $A+B.\ A-B :: \alpha+\beta :: \alpha-\beta.$
Vel quia probatum eſt $A+\alpha.\ B+\beta :: (\alpha.\beta ::) A-\alpha.B-\beta.$ Ergo alternè $A+\alpha.\ A-\alpha :: B+\beta.\ B.-\beta.$

QUOD SIC ENUNCIATUR

Si quatuor quantitates proportionales fuerint, etiam directè, & alterné miſcendo proportionales erunt.

Itaque ſi quatuor quantitates proportionales fuerint, etiam inversè, alternè, compoſitim, diuiſim, & mixtim proportionales erunt.

Hos ultimos argumentandi modos ſimul colligere operæ-pretium duxi., ut in ſequenti tabula cernitur.

Directè	$A.B :: \alpha.\ \beta.$
Inversè	$B.\ A :: \beta.\ \alpha.$
Alternè	$A.\alpha :: B.\ \beta.$

Componendo *vel* Dividendo $\left\{ \begin{array}{l} A \pm B . \; B :: \alpha \pm \beta . \beta . \text{ directè.} \\ A \pm \alpha . \; \alpha . :: B \pm \beta . \beta \text{ alternè.} \end{array} \right.$

Miſcendo $\left\{ \begin{array}{l} A + B . \; A - B :: \alpha + \beta . \alpha - \beta \text{ directè.} \\ A + \alpha . \; A - \alpha :: B + \beta . B - \beta \text{ alternè} \end{array} \right.$

COROLLARIUM.

Eſto $A . B :: \alpha . \beta .$ & ſit $A \,\mathrm{F}\, B$, vel α, vel β.

Quoniam alternè $A . \alpha :: B . \beta$, & eſt $A \,\mathrm{F}\, \alpha$: ergo $B \,\mathrm{F}\, \beta$.

At ex probatis $A - B . \alpha - \beta :: B . \beta$. Ergo $A - B \,\mathrm{F}\, \alpha - \beta$. & utrimque additis $B + \beta$. fit $A + \beta \,\mathrm{F}\, \alpha + B$.

Vel ſi ſit $A . B :: B . C .$ & ſit $A \,\mathrm{F}\, B$ vel C. erit $A + C \,\mathrm{F}\, 2 B$.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint, maxima & minima reliquis duabus majores erunt. At ſi tres ſint in continua proportione, ambæ extremæ majores erunt dupla media.

Atque hi ferè ſunt modi in terminis tranſpoſitionem, vel mutationem aliquam paſſis analogiſmum conſervandi, quos omnes uno Canone complecti non abs re fuerit. Itaque.

CANON GENERALIS.

DE MODIS ANALOGISMUM CONSERVANDI.

Quando Analogiſmus per Analogiſmum multiplicatur, aut dividitur; vel quando ejus termini inversè, alternè, compoſitim, diviſim, mixtimque ſumuntur; ſeu cùm ſoli antecedentes, ſolive conſequentes per idem, aut per æqualia; vel tùm antecedentes per unam quantitatem, conſequentes verò per alteram multiplicantur, aut dividuntur; & adhuc cum proportionali augmento creſcunt, aut cum proportionali contractione minuuntur; quin etiam cum ſimilium radicum extractione mutationem aliquam patiuntur: Uno verbo cùm homologi termini ſimiliter transformantur, ſemper inter Analogiſmi terminos (variatâ tamen eorum ratione) proportionalitas cuſtoditur.

Multa

Multa adhuc tam de Analogiſmo, quàm de Diſproportione, & præſertim de exceſſiva, & defectiva ratione dicenda ſuperſunt; ſed quæ hîc deſunt in alio opere tradentur: ea nunc libens omitto, cùm quilibet veſtigia noſtra ſequendo hanc proportionum materiam facilè promovere, & quantum libuerit extendere valeat.

CAPUT TERTIUM.

De præcipuis Symptomatibus, quæ à quantitatum multiplicationibus, atque diviſionibus proveniunt:

Sive,

De præcipuis Æquationes inſtituendi modis.

MONITUM.

Cum hîc plures quantitates, æquationis ope, invicem comparo, ſemper intellectum velim de quantitatibus homogeneis, vel eundem dimenſionum numerum habentibus, ne homogenei nomen ſæpiùs repetatur; Ideò verò generali quantitatis voce uſus ſum, ut indicarem hanc doctrinam maximè univerſalem eſſe, & indifferenter numeris, aut magnitudinibus accommodari poſſe: & quamvis ejus concluſionum veritas in quantitatibus ad quemlibet, modò ad eundem dimenſionum numerum aſcendentibus, oſtendi poſſit, verumtamen utiliſſimum erit hoc in loco quantitates ſimplices, ſive unicam dimenſionem habentes tantùm intelligere, quò ſimpliciora, & captu faciliora evadant neceſſaria hæc æquationum principia. His præmiſſis ſequitur

Primus fons Inventionis.

Quoniam partes omnes ſimul ſumptæ toti ſuo coæquantur, & à communi multiplicatore, vel diviſore, ſecto, vel inſecto non mutatur æqualitas. Igitur

PROPOSITIO FUNDAMENTALIS.

Summa productorum, à ſingulis alicujus quantitatis partibus, in communem quantitatem diviſam, vel indiviſam multiplicatis genitorum, æquatur facto totius in eandem quantitatem multiplicatæ.

Vel; *Productum ex duabus quantitatibus, ſe invicem multiplicantibus, æquatur aggregato productorum à ſingulis multiplicatæ partibus, in multiplicantem ductis.*

Hinc multæ prodeunt æquationes, quales ſunt, quæ ſequuntur.

PRIMA ÆQUATIO.

Poſita æquatio multiplicanda	$Z \Pi A + E.$
Communis multiplicator	$\times B$
Æquatio nova producta	$ZB \Pi BA + BE.$

SECUNDA.

Poſita æquatio multiplicanda	$Z \Pi A + E.$
Communis multiplicator	$\times Z.$
Æquatio nova producta	$Z^2 \Pi ZA + ZE.$

TERTIA: PRIMUS CASUS.

Poſita æquatio multiplicanda	$Z \Pi A + E.$
Communis multiplicator	$\times A.$
Æquatio nova prodiens	$ZA \Pi + A^2 + AE.$

SECUNDUS CASUS.

Poſita æquatio multiplicanda	$Z \Pi A + E.$
Communis multiplicator	$\times E.$
Æquatio nova prodiens	$ZE \Pi + AE + E^2.$

Digitized by Google

QUARTA.

Poſita æquatio multiplicanda	$Z \sqcap A + E.$
Æquales multiplicatores	$\times B \sqcap \times C + D.$
Æquatio nova prodiens	$ZB \sqcap + CA + CE + DA + DE.$

QUINTA.

Poſita æquatio multiplicanda	$Z \sqcap A + E.$
Æquales multiplicatores	$\times Z \sqcap \times A + E.$
Æquatio nova prodiens	$Z^2 \sqcap + A^2 + 2AE + E^2.$

QUOD ETIAM SIC DEMONSTRATUR.

Ex ſecunda æquatione	$Z^2 \sqcap ZA + ZE.$
Atqui per tertiam	$ZA \sqcap A^2 + AE.$
Et per eandem	$ZE \sqcap E^2 + AE.$
Ergo ſurgit Æquatio	$Z^2 \sqcap + A^2 + 2AE + E^2.$

HORUM OMNIUM DEMONSTRATIO.

In his omnibus æquationibus vel idem multiplicator æquales quantitates multiplicat, ut in tribus primis; vel certè æquales multiplicatores quantitates etiam æquales multiplicant, ut in duabus ultimis. Quare per primum inventionis fontem productæ ab his multiplicationibus quantitates inter ſe æquales ſunt.

PRÆCEDENTIUM ÆQUATIONUM COLLECTIO.

Quoniam à communi, vel æquali multiplicatore, diviſo, vel indiviſo non mutatur æqualitas.

Ergo 1°, Poſito $Z \sqcap A + E$, & ſumpto communi multiplicatore $\left\{\begin{matrix} B \\ Z \\ A \\ E \end{matrix}\right\}$ erit $\left\{\begin{matrix} ZB \sqcap BA + BE. \\ ZZ \sqcap ZA + ZE. \\ ZA \sqcap A^2 + AE. \\ ZE \sqcap AE + E^2. \end{matrix}\right.$

Ergo 2°,
Diviſo multiplicatore B in partes $C + D$,
ſeu poſito $B \sqcap C + D$, & $Z \sqcap A + E$
$\times B \quad \times C + D.$

Producitur æquatio nova $ZB \sqcap + CA + CE + DA + DE.$

Ergo 3°,
Sumpto æquali multiplicatore $Z \sqcap A + E$
$\times Z \quad \times A + E.$

Producitur æquatio nova $Z^2 \sqcap A^2 + 2AE + E^2.$

Secundus fons Inventionis.

Atque hæ ſunt ſimplices æquationes, quæ propoſitionis fundamentalis totidem expoſitiones ſunt, & quæ omnes à primo inventionis fonte originem ducunt, atque probationem.

Ab eis autem innumeræ aliæ per æqualium additiones, ſubductiones, multiplicationes, diviſiones, ſimilium radicum extractiones, necnon per diverſas ejuſdem rei interpretationes, ac æquipollentias deduci poſſunt, quæ omnes licet per dictas operationes inveniri queant, juvat tamen illas ex jam explicatis deducere, quò meliùs intelligantur, ac faciliùs memoriæ mandentur.

Sed priùs æquationes ſimplices verbis enunciare oportet. Itaque

Prima videlicet $ZB \sqcap BA + BE$, ſic verbis concipitur.

Propositio I. *Indiviſa quantitas, aliam quantitatem, quotlibet in partes diviſam multiplicans, producit bimenſum æquale bimenſis omnibus, quæ ſub indiviſa quantitate, & ſingulis diviſæ partibus continentur.*

Nam in æquatione $ZB \sqcap BA + BE$ verbis expoſitâ, eſt B indiviſa quantitas, quæ multiplicans quantitatem Z, diviſam in A, & E producit $\square^{um}$ ZB $\sqcap$ $\square^{is}$ omnibus, quæ ſub indiviſa quantitate B, & ſingulis diviſæ Z partibus A, & E continentur, nempe $BA + BE$, ut eſt oſtenſum.

Eſt hæc propoſitio eadem cum 1ª Elementi 2^{di} Euclidis, univerſaliter concepta.

Si verò ambæ quantitates propoſitæ ſecentur in quotcumque partes, & multiplicentur inter ſe, incidemus in quartam æquationem, nimirum $ZB \sqcap CA + CE + DA + DE$, quæ ſic verbis concipitur.

Si duæ quantitates, quotlibet in partes diviſæ, ſe invicem multiplicent, productum ab ipſis bimenſum æquatur aggregato bimenſorum omnium, ſub ſingulis unius partibus, in ſingulas alterius partes ductis, contentorum. PROPOSITIO II.

Nam in æquatione $ZB \sqcap CA + CE + DA + DE$ verbis expoſita, multiplicata quantitas Z ſecatur in partes $A + E$, multiplicans verò B, in partes $C + D$, & fit ▭um ZB, ſub dictis quantitatibus Z & B comprehenſum æquale aggregato ▭orum omnium, ſub ſingulis unius partibus A, & B, in ſingulas alterius partes C, & D ductis contentorum, ut eſt oſtenſum.

Quod ſi propoſitæ quantitates æquales inter ſe fuerint, incidemus in ſecundam æquationem, nimirum $ZZ \sqcap ZA + ZE$, quæ ſic verbis concipitur.

Si quælibet quantitas in quotvis partes dividatur, æquibimenſum totius æquatur bimenſis omnibus, quæ ſub tota, & ſingulis ejus ſegmentis comprehenduntur. PROPOSITIO III.

Nam in æquatione $ZZ \sqcap ZA + ZE$ verbis expoſita, quantitas Z ſecatur in partes A & E, cujus integræ □um, nempe ZZ æquatur bimenſis omnibus, quæ ſub tota Z, & ſingulis ejus ſegmentis A, & E comprehenduntur, nempe $ZA + ZE$, ut eſt oſtenſum.

Eſt hæc propoſitio eadem cum ſecunda Elementi ſecundi univerſaliter concepta.

Et ſi quantitas uultiplicans pars ſit multiplicatæ, incidemus in tertiam æquationem, nimirum $ZA \sqcap A^2 + AE$, vel $ZE \sqcap AE + E^2$, quæ ſic verbis concipitur.

Si quantitas ſecetur in quotcumque partes, bimenſum ſub tota, & una ejus parte contentum æquatur ſumptæ partis æquibimenſo, plus bimenſis omnibus, quæ ſub accepta parte, & reliquis ejus partibus continentur. PROPOSITIO IV.

Nam in æquatione $ZA \sqcap A^2 + AE$, vel $ZE \sqcap AE + E^2$

Digitized by Google

verbis expoſitâ, quantitas Z ſecta in partes A & E, & multiplicata per unum è ſuis ſegmentis; puta A, producit bimenſum Z A æquale ſumptæ partis A æquibimenſo A A plus ▭^{is} omnibus, quæ ſub accepta parte A, & reliquis ejus partibus E continentur, hoc eſt A E, ut eſt oſtenſum.

Eſt hæc propoſitio eadem cum 3ª Elementi ſecundi, univerſaliter concepta.

5^a, Æquatio, nempe $Z^2 \sqcap A^2 + 2AE + E^2$, ſic verbis concipitur.

PROPOSITIO V. *Æquibimenſum quantitatis utcumque biſectæ æquatur duobus partium æquibimenſis, plus duplice bimenſo ſub partibus.*

Vel paulò aliter. *Binomii cujuſcumque æquibimenſum æquatur duobus nominum æquibimenſis, plus duplice bimenſo ſub nominibus.*

Nam in æquatione $Z^2 \sqcap A^2 + 2AE + E^2$ verbis expoſita, Z eſt quantitas utcumque biſecta in A & E, cujus □^{um} nempe ZZ æquatur duobus partium A & B □^{is} nimirum $A^2 + E^2$, plus duplice ▭^{o} ſub nominibus, hoc eſt $2AE$, ut eſt oſtenſum.

Eſt hæc propoſitio eadem cum quarta Elementi 2^{di}, univerſaliter concepta.

SCHOLIUM.

Hinc quidem modus habetur dati cujuſvis multinomii æquibimenſum inveniendi, & ab ipſo radicem ſubæquibimenſam extrahendi; verùm quia methodus univerſalis tradi poteſt datum quodlibet multinomium ad quemcumque gradum attollendi, & ab ipſo radicem quamlibet educendi; idcircò alibi commodiùs hac de re agetur.

Æquationum autem derivatarum ſeries ferè talis eſt.

ÆQUATIO I^a DERIVATA.

I. CASUS.

Æquatio augenda	$Z^2 \sqcap + A^2 + 2AE + E^2$
Augmentum commune	$+ A^2$

Æquatio aucta $\left\{ \begin{array}{l} Z^2 + A^2 \,\Pi + E^2 \,(+ 2A^2 + 2AE\,\Pi) \\ + 2ZA \text{ per } 3^{am}. \end{array} \right.$

Surgens æquatio nova $Z^2 + A^2 \,\Pi\, 2ZA + E^2$

II. Casus.

Æquatio augenda $Z^2 \,\Pi + A^2 + 2AE + E^2$

Augmentum commune $+ E^2$

Æquatio aucta $\left\{ \begin{array}{l} Z^2 + E^2 \,\Pi + A^2 \,(+ 2AE + 2E^2 \,\Pi) \\ + 2ZE \text{ per } 3^{am}. \end{array} \right.$

Surgens æquatio nova $Z^2 + E^2 \,\Pi + 2ZE + A^2$.

Hujus æquationis origo.

Hæc æquatio ab æquatione $Z^2 \,\Pi + A^2 + 2AE + E^2$ manifeſtam ducit originem, per additionem quantitatis A^2 ad utramque æquationis partem, ac tranſmutationem $2AE + 2A^2$: vel $2AE + 2E^2$ in æquipollentes ſummas $2ZA$, vel $2ZE$, ut indicat operatio, & ſic verbis concipitur.

Si quantitas utcumque biſecta multiplicetur in alterutrum ſuum ſegmentum, duplum bimenſi ab hac multiplicatione producti, plus alterius ſegmenti æquibimenſo, æquatur integræ quantitatis æquibimenſo, plus æquibimenſo ſegmenti multiplicantis. Propositio VI.

Nam patet ex operatione quantitatem Z utcumque biſectam in A, & E, & per alterutrum ſuum ſegmentum A, vel E multiplicatam producere bimenſum ZA, vel ZE, quod bis ſumptum, unà cum reliqui ſegmenti æquibimenſo A^2, vel E^2, æquatur totius æquibimenſo Z^2, plus æquibimenſo ſegmenti multiplicantis A^2. vel E^2.

Eſt hæc propoſitio eadem cum 7^a, Elementi 2^{di} univerſaliter concepta.

Quæ etiam sic demonstrari potest.

Æquatio multiplicanda $ZA \,\Pi\, A^2 + AE$

Communis multiplicator $\times 2$

Æquatio multiplicata $2ZA \sqcap 2A^2 + 2AE$
Augmentum commune $+ E^2$

Æq. aucta $2ZA + E^2 \sqcap + A^2 (+ A^2 + 2AE + E^2 \sqcap) + Z^2$

Surgens æquatio nova $2ZA + E^2 \sqcap + Z^2 + A^2$

Eadem argumentatione concludetur $Z^2 + E^2 \sqcap + 2ZE + A^2$, ſi pro æquatione multiplicanda ponatur $ZE \sqcap AE + E^2$, ut manifeſtum eſt

COROLLARIUM I.

Quoniam in æquatione præcedenti ſuppoſitum eſt $Z \sqcap A + E$, ergo E differentia eſt inter Z & A, & $Z + A$ inæquibiſecta quantitas, cujus ſegmentorum æquibimenſa, nimirum $Z^2 + A^2$ oſtenſa ſunt æqualia duplici bimenſo ſub ſegmentis, nempe $2ZA$, plus E^2, hoc eſt plus æquibimenſo differentiæ inter ſegmenta. Quare

PROPOSITIO VII. *Si quantitas inæquibiſecetur, æquibimenſa ſegmentorum æquantur duplici bimenſo ſub ſegmentis, plus æquibimenſo differentiæ inter ſegmenta.*

APPENDIX.

Itaque æquibimenſa ſegmentorum inæqualium alicujus quantitatis majora ſunt duplice bimenſo ſub ipſius ſegmentis.

Æquantur enim huic duplici ▭° ſub ſegmentis, unà cum □° differentiæ inter ſegmenta, ut eſt oſtenſum.

COROLLARIUM. II.

Quia verò cujuſlibet binomii æquibimenſum æquatur duobus nominum æquibimenſis, plus duplice bimenſo ſub nominibus; & per præcedens corollarium duo nominum æquibimenſa æqualia ſunt duplici bimenſo ſub nominibus, plus æquibimenſo differentiæ inter nomina. Igitur

PROPOSITIO VIII. *Cujuſlibet binomij æquibimenſum æquatur quadruplici bimenſo ſub nominibus, plus æquibimenſo differentiæ inter nomina.*

QUOD

Digitized by Google

QUOD SIC PER NOTAS DEMONSTRATUR.

	Vel,
$\square\,\overline{Z+A}\,\rvert \sqcap Z^2 + A^2 + 2ZA$	$\square\,\overline{Z+E}\,\rvert \sqcap Z^2 + E^2 + 2ZE$
Atqui $Z^2 + A^2 \sqcap 2ZA + E^2$	Atqui $Z^2 + E^2 \sqcap 2ZE + A^2$
Ergo $\square\,\overline{Z+A}\,\rvert \sqcap 4ZA + E^2$	Ergo $\square\,\overline{Z+E}\,\rvert \sqcap 4ZE + A^2$

Deinde quia hîc quantitas Z utcumque biſecta in A & E ducitur in alterutrum è ſuis ſegmentis, puta A, & quadruplum $\square^i$ ab hac multiplicatione producti, + $\square^o$ alterius ſegmenti, nimirum $4ZA + E^2$ æquatur $\square^o$ integræ quantitatis propoſitæ, ſegmento multiplicante adauctæ, nempe $\square\,\overline{Z+A}\,\rvert$. Ideò eadem æquatio ſic verbis etiam concipitur.

Si biſecta quomodocumque quantitas, in alterutrum è ſuis ſegmentis multiplicetur, quadruplum bimenſi ab hac multiplicatione producti, plus æquibimenſo alterius ſegmenti æquatur æquibimenſo integræ quantitatis propoſitæ, ſegmento multiplicante adauctæ. PROPOSITIO IX.

Eſt hæc propoſitio eadem cum 8ª Elementi 2di Euclidis univerſaliter concepta.

Ampliùs quia in hac hyp. $Z \sqcap A + E$, igitur $Z + A \sqcap + 2A + E$, $\square^{um}$ autem biſectæ Z, ſegmento ſuo A adauctæ; hoc eſt $\square\,\overline{Z+A}\,\rvert$ æquatur quadruplo bimenſi ſub biſecta Z, & augente ſegmento A comprehenſi, hoc eſt $4ZA$, plus $\square^o$ alterius ſegmenti, videlicet $+E^2$. Igitur eadem propoſitio ſic etiam interpretari poteſt.

Si quantitas utcumque biſecta alterutro ſuorum ſegmentorum augeatur, æquibimenſum totius auctæ æquatur quadruplò bimenſi ſub biſecta, & ſub augente ſegmento comprehenſi, plus æquibimenſo alterius ſegmenti.

Ampliùs quoniam ex hypotheſi $Z \sqcap + A + E$, erit $Z + A \sqcap + A + A + E$, $\square^{um}$ autem æquibiſectæ $A + A$, externa quantitate E adauctæ, hoc eſt $\square\,\overline{Z+A}\,\rvert$ æquatur quadruplo bimenſi ſub æquibiſegmento aucto $A + E$, ſive Z, & ſub æquibiſegmento A comprehenſi, nimirum $4ZA$, plus externæ quantitatis $\square^o$, ſive $+E^2$. Itaque eadem propoſitio ſic etiam interpretari poteſt.

Si æquibiſecta quantitas externâ quantitate augeatur, æquibimenſum totius auctæ æquatur quadruplo bimenſi ſub biſecta, & augente ſegmento comprehenſi, plus æquibimenſo externæ quantitatis.

Et ſic una eademque propoſitio multas admittit interpretationes.

COROLLARIUM III.

Quia verò æquibimenſum à dimidio alicujus quantitatis æquatur quartæ parti æquibimenſi quod à tota fit; (nam verbi gratiâ, $\frac{Z}{2} \times \frac{Z}{2} \sqcap \frac{ZZ}{4}$) & oſtenſum eſt in præcedenti corollario, inæquibiſectæ quantitatis æquibimenſum æquari quadruplici bimenſo ſub ſegmentis, plus □° differentiæ ſegmentorum. Igitur

PROPOSITIO X. *Æquibimenſum à dimidio alicujus quantitatis inæquibiſectæ æquatur bimenſo ſub ſegmentis, plus quarta parte æquibimenſi à differentia ſegmentorum, ſive quod idem eſt plus æquibimenſo à ſemidifferentia ſegmentorum.*

Ut ſi Z + A ſit inæquibiſecta quantitas, cujus ſegmentorum Z & A differentia ſit E, fiet $\square\,\overline{\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}A}\ \sqcap\ ZA+\frac{1}{4}E2$ ut eſt oſtenſum. Quod etiam ſic paulò aliter interpretari poteſt.

Si quantitas aliqua æquibiſecetur, & inæquibiſecetur, æquibimenſum dimidiæ æquabitur bimenſo ſub ſegmentis inæqualibus comprehenſo, plus æquibimenſo interſegmenti vel ſemidifferentiæ ſegmentorum inæqualium, ut probatum eſt.

Eſt hæc propoſitio eadem cum 5ª. Elementi 2di univerſaliter concepta.

CONSECTARIUM I.

Ex probatis manifeſtum fit bimenſorum ſub biſectæ quantitatis partibus comprehenſorum maximum eſſe, quod ſub ejus medietatibus continetur.

Nam bimenſa ſub ſegmentis inæqualibus contenta ſemper aſſumunt interſegmenti, ſive ſemidifferentiæ æquibimenſum, ut dimidiæ ejuſdem quantitatis æquibimenſo coæquari valeant, ut vidimus.

CONSECTARIUM II.

Æquatio multiplicanda $\square\, \overline{\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}A}\,\Big|\ \Pi\ ZA + \frac{1}{4}E^2$

Communis multiplicator $\times\ 2$

Æqu. multiplicata $2\square\, \overline{\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}A}\,\Big|\ \Pi\ 2ZA + \frac{1}{2}E^2.$

Augmentum commune $+\frac{1}{2}E^2$

Æqu. aucta $2\square\, \overline{\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}A}\,\Big|\ + \frac{1}{2}E^2\ \Pi + 2ZA + E^2.$

Atqui $2ZA + E^2\ \Pi\ Z^2 + A^2$

Ergo ſurgens æquatio $\left\{\begin{array}{l} 2\square\, \overline{\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}A}\,\Big| + \frac{1}{2}E^2 \\ \Pi + Z^2 + A^2 \end{array}\right.$

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si quantitas aliqua æquibiſecetur, & inæquibiſecetur, æquibimenſa ſegmentorum inæqualium ſimul ſumpta duplicia ſunt æquibimenſi à dimidia, & æquibimenſi ab interſegmento ſive à ſemidifferentia ſegmentorum inæqualium. PROPOSITIO XI.

Nam quantitas $Z + A$ æquibiſecatur in $\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}A$, ac inæquibiſecatur in partes Z & A, & fiunt æquibimenſa ſegmentorum inæqualium Z & A, nempe $Z^2 + A^2$ ſimul ſumpta duplicia $\square^i$ à dimidia, nempe $\square\, \overline{\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}A},\Big|$ & $\square^i$ à ſemidifferentia ſegmentorum inæqualium, hoc eſt $\frac{1}{4}E^2$, ut probatum eſt.

Eſt hæc æquatio eadem cum 9^a Elementi 2^{di}, univerſaliter concepta

Digitized by Google

ÆQUATIO II. DERIVATA.

Æquatio interpretanda	$\square\,\overline{A+E}\,\vert\;\Pi\;+A^2$ $+\,2AE+E^2$
Interpretatio per multiplicationis opus	$2AE+E^2\;\Pi\;2A+E\times E$
Surgens æquatio nova	$\square\,\overline{A+E}\,\vert\;\Pi\;+A^2$ $+\,▭\,\overline{2A+E}\times E$

ET SIC VERBIS CONCIPITUR.

PROPOSITIO XII. *Si æquibiſecta quantitas augeatur, æquibimenſum dimidiæ, plus bimenſo ſub tota aucta, & ſub augmento æquatur æquibimenſo dimidiæ auctæ.*

Nam ad æquibiſectam $A+A$ addatur augmentum $+E$, ut fiat triſecta $A+A+E$, erit ▭ ſub tota aucta $A+A+E$, & ſub augmento E comprehenſum, nimirum ▭ $2A+E\times E$ plus $\square^o$ mediæ, hoc eſt $+A^2\;\Pi\;\square^o$ æquibiſegmenti aucti, nempe $\square\,\overline{A+E}\,\vert$, ut eſt oſtenſum.

Eſt hæc propoſitio eadem cum 6ª Elementi 2^di univerſaliter concepta, quæ etiam ſic interpretari poteſt.

Si biſecta quomodocumque quantitas alterutrius è ſuis ſegmentis dimidio multetur, æquibimenſum reſidui æquabitur ablatæ partis æquibimenſo, plus bimenſo ſub integra biſecta, & ſub ejus indiviſa parte comprehenſo.

Nam biſecta $2A+E$ multetur dimidio ſegmenti $2A$; itaut reliquum ſit $A+E$, hujus reſidui æquibimenſum, nempe $\square\,\overline{A+E}\,\vert$, æquatur bimenſo ſub integra quantitate $2A+E$, & ſub ejus indiviſa parte E comprehenſo, nimirum ▭ $\overline{2A+E}\times E$, plus æquibimenſo ablatæ partis, videlicet $+A^2$, ut eſt oſtenſum, hæc eadem propoſitio ſic etiam interpretari poteſt.

Si ſint duæ inæquales quantitates (A, & $A+E$) $\square^{um}$ *minoris* A^2, $+$ ▭° *ſub ambarum ſumma, & differentia* ($+\overline{2A+E}\times E$) *æquatur* $\square^o$ *majoris, (nempe* $\square\,\overline{A+E}$.)

Digitized by Google

ÆQUATIO III. DERIVATA.

I. CASUS.

Ex quinta æquatione $\square\, \overline{Z+A} \,|\, \Pi + Z^2 + A^2 + 2ZA$

Addatur utrimque $+ E^2$

Summa erit $\begin{cases} \square\, \overline{Z+A} \,| + E^2\ \Pi + Z^2 + A^2 \\ (+ 2ZA + E^2\ \Pi) + Z^2 + A^2 \end{cases}$

Ergo ſurgit æquatio $\square\, \overline{Z+A} \,| + E^2\ \Pi\ 2Z^2 + 2A^2$

II. CASUS.

Ex quinta æquatione $\square\, \overline{Z+E} \,|\, \Pi\, Z^2 + E^2 + 2ZE$

Addatur utrimque $+ A^2.$

Summa erit $\begin{cases} \square\, \overline{Z+E} \,| + A^2\ \Pi + Z^2 + E^2 \\ (+ 2ZE + A^2\ \Pi) + Z^2 + E^2 \end{cases}$

Ergo ſurgit æquatio $\square\, \overline{Z+E} \,| + A^2\ \Pi + 2Z^2 + 2E^2$

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si æquibiſecta quantitas augeatur, æquibimenſum totius auctæ, plus æquibimenſo augmenti, duplum eſt æquibimenſi dimidiæ auctæ, & æquibimenſi dimidiæ.

Nam $A + A$ eſt æquibiſecta quantitas, quæ augetur quantitate E, ita ut tota aucta fiat $(A + A + E\ \Pi)\ Z + A$, & cujus $\square^{um}$, nempe $\square\, \overline{Z+A} \,|$, $+ \square^{o}$ augmenti E, nimirum $+ E^2$, æquatur duplo $\square^{i}$ à dimidia A, hoc eſt $+ 2A^2$, & duplo $\square^{i}$ à dimidia aucta, quod eſt $2Z^2$, ut eſt oſtenſum.

Eſt hæc propoſitio decima 2[di] Elementi, univerſaliter concepta.

SCHOLIUM.

Quemadmodum ex quantitatum diviſionibus, mutuiſque inter ſe multiplicationibus primæ, & facillimæ æquationes ducerent originem ſatis ſuperque dictum eſt. Nam ſi omnia, quæ ad hanc materiam ſpectant, vel ſola corollaria, quæ hinc deduci poſſunt, hunc in locum conge-

Digitized by Google

rere vellem, opere in immenſum pravè creſcente, admodum præpoſterâ methodo uterer; multa enim tam ex arithmetica quàm geometria, de quibus nondum egimus, mutuanda ſæpiùs forent ad plurimas res, quæ ex jam dictis pendent, concludendas. Quamobrem, ut hoc vitium fugiamus, generalia generaliter tractabimus, contenti hoc in loco æquationum fundamenta jeciſſe, quibus poſitis facilè erit poſteà in quocumque quantitatis genere verſantes oſtenſarum æquationum argumentationibus uti, ſimileſque multas ad harum inſtar efformare.

Jam verò ut generalis hæc doctrina in particularibus uſum habere poſſit, ſive ut generalis hujus doctrinæ uſus numeris, & magnitudinibus accomodari queat, numerorum figurarumque proprietates couſiderando, quam una quæque multiplicationem, vel diviſionem ferat, inveſtigabimus; & concepta per traditas æquationes de numeris aut magnitudinibus theoremata vel problemata, prout rei de qua agetur natura, conditioque poſtulabit, enunciabimus.

Verbi gratiâ, ſi parium & imparium numerorum naturam conſiderantes ſumamus quodcumque numericum æquibimenſum, cujus radicem augeamus minimo augmento, ſive ipſâ unitate, fiet binomium quoddam, cujus æquibimenſum conſtabit duobus partium æquibimenſis, plus duplice bimenſo ſub partibus, ſicut concluſum eſt propoſitione 5ª. ſed una ejus pars eſt unitas; Igitur dicti binomij □um conſtat aſſumpto □o, plus ipſius unitatis □o, plus duplice ▭o. ſub unitate, & altera ejus parte, nimirum aſſumpti □i radice, hoc eſt plus duplo radicis aſſumpti □i, quoniam unitas non multiplicat. Duplum autem radicis numericæ, ſive duplum numeri alicujus numerum parem conſtituit, cui addita unitate, ſive □o unitatis impar efficitur; Addito igitur ad quodlibet numericum □um impari numero, conſtante ex duplo ipſius radicis, & unitate, □um numericum proximè ſequens generatur, quoniam aſſumpti □i radix minimo augmento, ſive ipſâ unitate crevit.

Digitized by Google

Jam ſi primum $\square^{um}$ numericum, hoc eſt unitas, accipiatur, eique apponatur primus poſt unitatem impar numerus, nimirum 3, conſtans ex duplo radicis $\square^{i}$ unitatis, ſive binario, plus unitate, formatur $\square^{um}$ numericum proximè ſequens, videlicet 4, cujus radix 2 eſt unitate major radice primi $\square^{ti}$ numerici, nempe 1, & eo deinceps progreſſu. Itaque

Æquibimenſa numerica continua imparium additione generantur, & quodlibet eorum tot imparibus numeris conſtat, quot unitatibus radix ipſius componitur.

Nam 1um $\square^{um}$ numericum, nempe unitas, cujus radix eſt etiam 1, conſtat unico impari, 2um $\square^{um}$ numericum, cujus radix eſt binarius, duobus imparibus numeris conſtat, qui ſunt $1+3$, & ſic reliqua $\square^{a}$ numerica per continuam imparium additionem ſucceſſive generantur.

Ex hac $\square^{orum}$ numericorum proprietate colligitur modus inveniendi $\square^{um}$ numericum, cum quo datus quivis impar numerus $\square^{um}$ numericum efficiat.

REGULA I.

Ex dato impari numero auferatur 1, $\square^{um}$ ex reliqui dimidio in ſe multiplicato, adjunctum dato impari $\square^{um}$ efficiet.

Ut manifeſtum fit ex deſcripta $\square^{orum}$ numericorum generatione.

Viciſſim reperiemus $\square^{um}$ numericum, à quo datus quivis impar numerus ſubſtractus relinquat $\square^{um}$ numericum.

REGULA II.

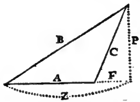
Ex dato impari numero dematur 1, & reliqui numeri dimidio adjiciatur 1, fiet radix $\square^{ti}$ quæſiti, à quo nempe datus impar numerus ablatus relinquet $\square^{um}$.

Ut manifeſtum fit ex deſcripta $\square^{orum}$ numericorum generatione.

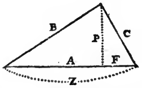
Sic plura corollaria Arithmetica à poſitis principiis deduci poſſent, ſi in cæteras numerorum proprietates inquirere vellemus.

Digitized by Google

2ª.



1ª.



Si verò geometrica contemplantes ſumamus, verbi gratiâ $\triangle^{um}$ quodvis B C Z, vel B C A, & ab uno ex ejus $\angle^{is}$ demittatur $\perp^{um}$ P.

Quoniam 1° cadente intra $\triangle^{um}$ $\perp^{o}$ P in 1ª figura recta Z biſecatur in partes A & E, fiet $Z^2 + A^2 \sqcap 2ZA + E^2$, ut concluſum eſt propoſitione 6ª, & utrimque addito $+P^2$ habebitur:

$+Z^2(+A^2+P^2 \sqcap)+B^2 \sqcap 2ZA(+E^2+P^2 \sqcap)+C^2$:

unde nova ſurgit æquatio $+Z^2+B^2 \sqcap +2ZA+C^2$.

2° Cadente extra $\triangle^{um}$ $\perp^{o}$ P, ut in 2ª figura, quoniam recta Z, biſecatur in partes A, & E fiet per 5am. propoſitionem $Z^2 \sqcap +A^2+2AE+E^2$, & utrimque addito $+P^2$ oritur $(Z^2+P^2 \sqcap)+B^2 \sqcap +A^2+2AE(+E^2+P^2 \sqcap)+C^2$, unde nova ſurgit equatio $+B^2 \sqcap +C^2+A^2+2AE$.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

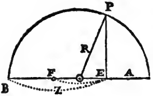
IN 1° CASU.

In $\triangle^{lis}$ acutiangulis $\square^{a}$ laterum $\angle^{um}$ acutum continentium æquantur $\square^{o}$ lateris $\angle^{um}$ acutum ſubtendentis, plus duplice ▭° ſub uno laterum, circa $\angle^{um}$ acutum exiſtentium, quod à $\perp^{o}$ biſecatur, & ſub ſegmento prope $\angle^{um}$ acutum adjacente.

IN 2° CASU.

In obtuſiangulis $\triangle^{lis}$ $\square^{um}$ lateris $\angle^{um}$ obtuſum ſubtendentis æquatur ſummæ $\square^{orum}$ à lateribus $\angle^{um}$ obtuſum continentibus, plus duplice ▭° ſub uno laterum circa $\angle^{um}$ obtuſum exiſtentium, in quod nempe cadit $\perp^{um}$, & ſub ejuſdem lateris continuati ſegmento, inter obtuſum $\angle^{um}$ & $\perp^{um}$ intercepto.

Aut



Aut ſi ad circuli naturam attendentes, qui ſit, verbi gratiâ O Z P, à quovis ejus circumferentiæ puncto P demittamus $\perp^{um}$ P E, & ducamus O P.

Quoniam recta Z + A inæquibiſecatur in puncto E, & æquibiſecatur in puncto O propter circulum; Ideò, ut ſuprà concluſum eſt, ($\square^{um}$ radii B O Π) $\square^{o}$ radii O P Π ▭^{o} Z × A (+ $\square^{o}$ interſegmenti O E Π) $\frac{1}{4}$ E^{2} Π $\frac{1}{4}$ E^{2} + $\square^{o}$ $\perp^{li}$ P E, & ablato utrimque $\frac{1}{4}$ E^{2} relinquitur ▭ Z × A Π $\square^{o}$ $\perp^{li}$ P E.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

In quovis circulo quadratum perpendiculi ab aliquo ejus circumferentiæ puncto in diametrum demiſſi æquatur rectangulo ſub ſegmentis diametri, à dicto $\perp^{o}$ *factis.*

Vel quod idem eſt; *In quovis circulo perpendiculum ab aliquo ejus peripheriæ puncto in diametrum demiſſum medium eſt proportionale inter diametri ſegmenta à dicto* $\perp^{o}$ *facta.*

Hoc autem in circulo accidit ob inſitam, & peculiarem ejus proprietatem, quâ rectæ lineæ à centro ad circumferentiam ductæ inter ſe æquales ſunt; nam ideò recta demiſſum perpendiculum & interſegmentum connectens radius ſit, ſive ſemidiameter circuli. Quapropter $\square^{um}$ ſemidiametri, minus $\square^{o}$ interſegmenti ſemper æquabitur $\square^{o}$ dimiſſi $\perp^{li}$, ſive ▭^{o} ſub inæqualibus diametri ſegmentis comprehenſo, ut patet ex probatis.

Hinc facile eſt quadratum exhibere, dato rectangulo æquale.

REGULA.

Deſcripto ſuper ſummam laterum datum ▭^{um} continentium ſemicirculo, à puncto conjunctionis laterum ad ambitum deſcripti ſemicirculi excitetur $\perp^{um}$, & erit hujus $\perp^{li}$ $\square^{um}$ æquale dato ▭^{o}, ut manifeſtum ſit ex probatis.

Digitized by Google

Alia multa his ſimilia, ſi temerè exſpatiari fas eſſet, afferre poſſem, quorum probationes à tradita hoc in capite doctrina præcipuè dependent, ſed quia etiam prænoſcendis quibuſdam geometricis rebus innituntur, quas hactenus demonſtraſſe minimè conveniens fuit, ideò talibus in propria loca rejectis pergam ad reliqua. Interim abundè nunc ſatisfactum reor maximè neceſſariis æquationum principiis.

CAPUT QUARTUM.

De Geometricis Definitionibus.

DEFINITIO. I.

Punctum eſt id quod in magnitudine indiviſibile exiſtit: vel potiùs, *Eſt magnitudinis principium, atque terminus.*

DE NATURA PUNCTI.

OBJECTUM quod in quantitate continua minimum apprehendit intellectus, illud punctum eſt, omni magnitudine carens. Nam cùm magnitudini in primis competat ut ſit diviſibilis, puncti verò natura talis ſit ut diviſionem non admittat, manifeſtum eſt punctum nullam ea de cauſa magnitudinem obtinere.

Sed quamvis punctum magnitudine careat ab ipſo tamen fluit omnis magnitudo, nam à puncto linea exoritur, ex illa ſuperficies emergit, ab hac tandem corpus generatur; Unde continui procreatio velut aliqua puncti ſe ſe expandentis, explicantiſque diffuſio concipi poteſt: Atque ſic punctum quaſi ſemen eſt, quod omnes omnium quæ ab illo proficiſcuntur magnitudinum ſpecies virtute complectitur. Quoniam verò nulla datur magnitudo, quæ in infinitum augeri non poſſit, ideò puncti potentiam infinitam eſſe neceſſariò relinquitur.

Prætereà punctum continuitatis eſt cauſa in magnitudine, firmiſſimum enim vinculum eſt quo partes hujuſce quantitatis quàm arctiſſimè inter ſe cohærentes uniuntur: Et quia partes illæ, quantæcumque ſint, infinitas ſectio-

nes recipiunt, ut ex earum generatione apparet, infinitam iterum puncti virtutem inde concludere fas eſt.

Cur autem infinitæ diviſibilitatis cauſa, ut antè continuitatis, puncto tribuatur, ratio eſt in promptu; nam quod ſecatur diviſibile tantùm eſt in illis terminis, atque vinculis quibus ipſum continetur, copulaturque; ſed punctum quantitatis continuæ vinculum eſt, ac infinita in quovis quanto (ut ex magnitudinis productione clarè colligitur) reperiuntur puncta; punctum igitur infinitæ diviſibilitatis cauſa eſt.

Punctum in aliquibus quadrat cum unitate, in aliquibus diſcrepat; nam ut illa eſt principium omnis numeri, ita punctum eſt principium omnis magnitudinis; ſed in hoc diſcrimen eſt quod unitas eſt pars numeri, punctum verò quamvis initium ſit finiſque lineæ, non tamen eſt pars lineæ. Differunt etiam in eo quod unitas nullam poſitionem aut ſitum poſtulet, punctum verò poſitionem atque ſitum habeat in magnitudine.

Punctum eſt quoque ſimile inſtanti in tempore, eſt enim concipiendum illud ut individuum.

DE USU PUNCTI.

Principiorum omnium cognitio adeò neceſſaria, utiliſque eſt in earum rerum tractatione quarum principia ſunt, ut iis ignoratis, vel perperam intellectis nulla queat eſſe reliquorum ſcientia. Punctum verò fœcundiſſimum illud magnitudinis principium tanti momenti eſt in rebus mathematicis, ut in illarum univerſa conquiſitione nihil aliud ferè ſpectetur quàm punctum: Circuli centrum quod punctum eſt omnium primum quæritur; magnitudines, cujuſcumque generis illæ ſint, in punctis angularibus colliguntur; Eorumdem motu infinitæ varietatis lineæ generantur, quæ poſteà punctis terminantur, ſecantur, atque dividuntur, ut punctum quod in continui generatione omnia efficit, etiam in operationibus quæ circa continuum fiunt inſtar omnium ſit, totiuſque geometricæ ſpeculationis imaginem repræſen-

ret. Quiſquis igitur in omnibus punctum aſſequi poterit, is à ſcopo nuſquam aberrabit.

DEFINITIO II.

Linea eſt magnitudo ſolius longitudinis particeps.

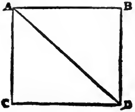
De natura lineæ.

PRIMA magnitudinum ſpecies hîc definitur, quæ linea vocatur; hæc uno tantùm modo diviſibilis eſt, nimirum ſecundum longitudinem. Nam quia magnitudo per extenſionem ſuam diviſibilis eſt, ut patet, tot modis illa dividi poterit, quot erunt in ea varii extenſionum modi; linea autem unico tantùm modo extenditur, nimirum in longitudinem; ergo ſecundum ſolam longitudinem diviſibilis erit.

Produci verò concipitur motu puncti; nam ſi punctum moveretur, ac relinqueret ſui veſtigium illud eſſet longum propter motum, non tamen latum; quia punctum, à quo procedit, omnis expers eſt extenſionis. Non igitur ſicut ex accumulatis unitatibus fit numerus, ita quoque ex additis punctis fit linea, ſed ex ipſorum fluxu continuo, atque in hoc differt continuum à diſcreto, quod continuum infinitè dividatur, neque ad punctum unquam deveniatur, ut in diſcretis ad unitatem.

Porrò puncti motus, à quo lineam generari diximus, vel ſimplex eſt, vel compoſitus. Simplicem motum voco qui per unicam ſimplicemque rei motionem peragitur, vel peragi poteſt, ut quando punctum aliquod, vel una linea altero extremorum fixo movetur in rectæ, circularíſve procreatione, ibi motus eſt ſimplex, quia per unam eamque ſimplicem rei lationem fit. Et quamvis concipere poſſimus diagonalem ex duobus laterum ſuorum permixtis motibus ortam eſſe, quia tamen alio modo, hoc eſt ſimplici puncti motione diagonalis illa deſcribi poteſt, motus per quem generabitur non dicetur mixtus ſed tantùm ſimplex.

Digitized by Google



Ut ſi linea A B parallelisſinum ubique ſervans cum linea C D, ad ipſam æquabili motu feratur per rectam A C, & eodem tempore, atque etiam æquabili motu punctum A feratur verſus punctum B, diagonalis A D, quam punctum A deſcribet, pendebit quidem à duobus motibus, videlicet à motu puncti A, ſive lineæ A C, verſus lineam B D, & à motu rectæ A B in rectam C D. Verùm quia illi duo motus uniformes ſunt, nimirum recti, latio puncti A ad punctum D, quæ etiam rectà fit, ſimplex dicetur; neque enim in hac diagonalis generatione motus alius advertitur quàm rectus, quem in plures dividi imaginamur, ſive qui plurium inſtar conſideratur. Aliquando tamen in ſimplicis lineæ generatione duos motus inter ſe diverſos numeramus, ut in recta linea à rotis curruum deſcripta, quæ à motu circulari circa rotarum axem, & à motu recto ſecundum longitudinem viæ per quam rotæ feruntur, dependet. Verùm quia illi vel ſimiles motus compoſiti ad linearum naturâ ſuâ ſimplicum generationem neceſſarii non ſunt, cùm ad hoc ſufficiat aliqua ſimplex motio, hujuſmodi lineæ ſimplici tantùm motu generari dicentur.

Plurimi autem alii motus reperiuntur quos ſic ad ſimplicem formam reducere eſt impoſſibile, verbi gratiâ, motus quo linea ſpiralis deſcribitur ita compoſitus eſt ex recto atque circulari, ut neuter ſolus ad hanc lineam generandam ſufficiat: ſic motus quo quadratrix deſcribitur ex recti circulariſque motus permixtione exſurgit. Tales itaque lineæ ex pluribus, iiſque ad earum generationem neceſſariis motibus ortæ, compoſitæ ſunt.

DE USU LINEÆ.

Linearum uſus tantus eſt ut per ipſas omnia geometriæ problemata analyſeos ſtudio ſolvi poſſint, cognitis enim aliquibus in figura lineis ipſa ſtatim nota evadit, cujus rei ratio eſt quod linea ſuperficiei ſit terminus, & ab ipſius

motu ſuperficies integra naſcatur, ut mox videbimus; Et verò quid linea ſimplicius, quid quod animo repræſentari facilius ſit invenias.

DEFINITIO III.

Extrema ſive fines lineæ ſunt puncta.

EXPLICATIO.

QUIA linea eſt quidam puncti fluxus, ac velut continuatio, ſi concipiatur punctum moveri, neceſſe eſt ubi motus incipit, ibi lineam ortum habere; ubi verò quieſcit ibi lineam deſinere: unde linea punctis terminari jure optimo dicitur.

ANNOTATIO.

Omnis linea, ſicut omnis magnitudo finita eſt actu, nec ulla magnitudo conſideratur à Mathematicis niſi quatenus eſt terminata, nihil enim quod infinitum eſt vel ſcientiâ colligi, vel mente comprehendi poteſt. Unde cùm linea infinita vocatur intelligitur indeterminata, & quouſque libuerit producibilis.

DEFINITIO IV.

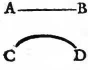
Recta linea eſt quæ per indeflexum à punctis extremis tranſitum ducitur; vel *quæ æqualiter intra puncta ſua diſtenditur.* Sive etiam *quæ tota in punctorum intervallo continetur, necnon cujus intermedia puncta extremis obſiſtunt.*

EXPLICATIO.

LINEA per indeflexum à punctis extremis tramitem duci, ſive æqualiter intra puncta ſua diſtendi, necnon in punctorum intervallo tota contineri tunc dicetur quando talem inter illa ſitum obtinebit, ut nulla ſui parte huc vel illuc vergendo ab ipſorum altitudine recedat, hoc eſt ut nulla ejus pars punctis extremis altior aut depreſſior evadat, ſed omnes ejus partes unam cum ipſis altitudinem obtineant.

De natura lineæ rectæ.

Linea vel indeflexè, ſive ex æquo punctis ſuis interjicitur, vel deflexè ſive ex inæquali.



Unde duæ naſcuntur linearum ſpecies, recta videlicet ut linea A B, quæ ex æquo. Flexa ſive curva ut C D, quæ ex inæquali, intra puncta ſua diſtenditur.

Sed linearum differentia meliùs innoteſcet, ſi ad ipſarum generationem attenderimus. Cùm enim fluxu puncti fieri concipiatur linea, ſi punctum illud æquali, & inflexibili motu ad aliud pūnctum fluat, generabitur recta, ſi uniformi, & æquali etiam motu, ſive æquidiſtanter circa unum tantùm feratur, orietur circularis; ſi motu inæquali vel compoſito vagetur, producentur reliquæ curvæ. Atque hinc patet quod recta & circularis in alias ſpecies dividi nequeant, cùm oriantur ex motus uniformitate, & æqualitate, quæ nullam in ſe diviſionem mutationemve recipit, cæteris propter motus difformitatem & inæqualitatem diverſas in ſpecies abeuntibus. Patet etiam intra rectam, & circularem hoc tantùm ineſſe diſcriminis quod recta intra duo puncta diſtendatur, circularis verò circa unum, & cùm ambæ ſolæ immutabilis ſint invariabiliſque naturæ, hoc eſt cùm pluribus modis habere ſe nequeant illæ ſolæ pro perfectiſſimis habendæ ſunt.

Ex hac ſic explicata definitione:

Colligitur 1°. *Rectam ſolam per punctorum ſuorum diſtantiam tranſire.*

Nam cùm illa ſola propter indeflexum à punctis extremis tranſitum, qui neque magis, neque minus recipit, certum quemdam inter extrema ſitum obtineat (circularis enim circa unicum fertur, cæteræ verò inter extrema vagantur) ſequitur quod illa ſola tranſire debet per certum aliquod, atque præfinitum ſpatium; tale autem inter extrema præter ipſam diſtantiam aliud nullum exiſtit; recta igitur per punctorum diſtantiam tranſibit.

Digitized by Google

COLLIGITUR 2°. *Rectam punctorum extremorum diſtantiæ eſſe æqualem.*

Quia enim per ipſam punctorum extremorum diſtantiam ducitur, & cùm ipſa terminatur neceſſe eſt ipſi fieri æqualem, aliàs locus locato non eſſet æqualis.

COLLIGITUR 3°. *Rectas omnes à punctis æqualiter diſtantibus ductas invicem æquales eſſe.*

Supponuntur enim æquales diſtantiæ, quibus rectas coæquari jam probatum eſt.

COLLIGITUR 4°. *Rectam breviſſimam eſſe ab uno puncto ad aliud extenſionem.*

Diſtantiam enim breviſſimum illud ſpatium dicimus quod inter res amotas eſt interjectum; quare cùm recta per hoc ſpatium ducatur, erit breviſſima quæ dari poſſit ab uno puncto ad aliud extenſio.

COLLIGITUR 5°. *Duas rectas intra duo puncta duci non poſſe.*

Nam ambæ per eandem diſtantiam, ſive per idem ſpatium tranſirent, ideoque una & eadem foret linea.

COLLIGITUR 6°. *Duas rectas ſpatium non continere, nec in duobus punctis ſibi occurrere.*

Nam ſi primum efficerent in extremis ſibi neceſſariò occurrerent, ſi ſecundùm earum quædam partes in extremis etiam ſibi occurrerent, atque ideò duæ rectæ inter duo puncta duci poſſent, quod eſt contra præcedens axioma.

COLLIGITUR 7°. *Rectam punctorum diſtantiam metiri.*

Menſura enim cujuſque rei debet eſſe ſtata atque determinata, quare cùm ſola recta talis ſit, ipſa ſola punctorum diſtantiam metietur.

COLLIGITUR 8°. *Rectam intra duo puncta ordinari.*

Ordinatum enim dicitur quod uno tantùm modo ſe habet, ſive quod pluribus modis fieri nequit, quare cùm recta ad unam tantummodo intra duo puncta poſitionem determinetur, neceſſe eſt ipſam intra duo puncta ordinari.

COROLLA-

Digitized by Google

COROLLARIUM.

Si duo plana ſe mutuo ſecuerint communis eorum ſectio eſt recta linea. 3. prop. 11.

DEMONSTRATIO.

Nam aliàs à duos buacceptis in interſectione punctis duci poſſent duæ rectæ in duobus planis ſe interſecantibus, atque ſic duæ rectæ intra duo puncta duci poſſent, vel duæ rectæ ſpatium comprehenderent, quod eſt contra probata.

COLLIGITUR 9°. *Duarum rectarum ab extremis alicujus rectæ exeuntium, & ſupra vel infra ipſam in unum punctum coincidentium aggregatum majus eſſe rectâ ſupra, vel infra quam illæ concurrunt.*

Nam recta linea tranſit per breviſſimam viam quæ ab uno puncto ad aliud tendit; Ideoque cæteræ viæ, inter illa duo puncta interjectæ, breviſſimâ longiores ſunt; & conſequenter duæ nominatæ lineæ, quæ per has longiores vias ducuntur, & quæ diſtantiis ſuis coæquantur, rectâ lineâ per breviſſimam viam tranſeunte majores ſunt.

PETITIONES *ſive* POSTULATA.

Quoniam recta linea ſimpliciſſimo puncti, inter duo extrema rectà, ſive æqualiter fluentis, & per eorum diſtantiam tranſeuntis, motu naturaliter, & ſine arte generatur, illeque directus, & omnis inclinationis expers puncti motus inartificialiter etiam per infinitam diſtantiam continuari poteſt. Ergo jure optimo

I.

Poſtuletur ut à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere concedatur.

II.

Et rectam terminatam in continuum rectà producere.

SCHOLIUM.

De cæteris lineis, videlicet de curvis, ſi circularem

excipias, idem peti non poteſt; illæ enim per motus compoſitos generantur; ideoque ſine artis præceptis deſcribi nequeunt.

DE USU LINEÆ RECTÆ.

Cùm in magnitudinum comparationibus omnia ferè ad æqualitatem revocentur, rectitudo autem æqualitas quædam ſit, patet rectæ lineæ uſum eſſe immenſum.

DEFINITIO V.

Superficies eſt magnitudo longa, & lata, profunditate, vel altitudine carens.

SUPERFICIES ſecunda magnitudinis ſpecies eſt, propter ſuam longitudinem, & latitudinem duobus modis diviſibilis. Produci autem concipitur motu lineæ; nam ſi linea moveretur ſecundum ſuam longitudinem, ac relinqueret ſui veſtigium, illud eſſet longum propter motum, ac etiam latum, quia linea, à qua motus procedit, extenſionem habet. Unde quemadmodum ex puncti fluxu in continuum exit linea, ita ex lineæ in tranſverſum ductu oritur ſuperficies. Et quia patet quod totidem ſitus intra ſuas lineas ſuperficies habere poſſit quàm linea intra puncta, manifeſtum eſt totidem modis dividi debere. Unde duæ erunt ſuperficierum ſpecies, recta videlicet & curva.

DE USU SUPERFICIEI.

Non ſecus ac cognitis quibuſdam planorum lineis in figurarum ipſarum cognitionem devenitur, ita etiam cognitis quibuſdam ſolidorum ſuperficiebus ipſa ſolida nota fiunt, cujus rei eadem quæ de lineis ratio eſt, ſuperficies enim ſolidorum terminus eſt, & ex ipſius motu ſolida generantur, ut cùm eò perventum erit, docebimus.

DEFINITIO VI.

Extrema, ſive fines ſuperficiei ſunt lineæ.

EXPLICATIO.

IDEM de linea vidimus, nam quia motu lineæ ſuperficies oritur, neceſſe eſt ubi lineæ motus incipit, ibi

ſuperficiem incipere, ubi verò quieſcit ibi ſuperficiem deſinere; quamobrem ſuperficies lineis terminari jure merito dicitur.

DEFINITIO VII.

Plana ſuperficies eſt quæ per indeflexum à lineis extremis tranſitum ducitur, vel quæ æqualiter intra ſuas lineas porrigitur, vel etiam quæ tota inter extremas lineas continetur.

HÆc definitio rectæ lineæ definitioni eſt analoga; Ideoque ex antedictis eſt intelligenda, ſolummodo notandum eſt hanc ſuperficiem perſæpè vocari ſimpliciter planum.

ANNOTATIO.

Sicut ſuperiùs duas rectas lineas intra duo puncta duci non poſſe probavimus, ita hîc per eandem rationem oſtendetur duo plana intra duas lineas duci non poſſe, nam etiam per eandem diſtantiam tranſirent, ideoque unum ac idem foret planum quandoquidem planum intra ſuas lineas non ſecus ac recta linea intra ſua puncta æqualiter extenditur; unde neque duo plana ſpatium comprehendunt, neque in duobus locis ſibi occurrunt, hoc enim ex probatis ſequitur. Generaliter quicquid de rectis lineis propter æqualem inter extrema porrectionem concluſum eſt, idem hîc de planis, mutatis tantùm nominibus concludi poterit.

DEFINITIO VIII.

Angulus eſt duarum pluriumve ejuſdem ſpeciei magnitudinum, ad unum punctum collectarum, & non in continuum jacentium breviſſima remotio, ſive diſtantia.

DE ANGULI NATURA.

HÆc definitio anguli naturam declarat, in qua cauſæ, à quibus pendet, explicantur; materialis, ſunt

Digitized by Google

duç, vel plures magnitudines, ad unum punctum collectæ, ſive ex eodem puncto exeuntes, formalis, ipſarum remotio; conditio autem neceſſaria, eſt ipſarum magnitudinum indirecta poſitio, ſive unius magnitudinis ad alteram inclinatio. Quod ſi magnitudines illæ ſint duæ lineæ, comprehenſus ab eis angulus, planus vocabitur; ſolidus verò ſi comprehendatur ab uno, vel pluribus ſuperficiebus, collectionis punctum ambientibus; & unâ quidem, ut eſt verticalis coni angulus, pluribus verò, ut ſunt reliqui anguli ſolidi.

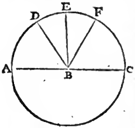
Ut igitur ex duabus, verbi gratiâ, lineis angulus aliquis efformetur, debent illæ lineæ in unum punctum deſinere, & ſibi mutuo indirectè occurrere, alioquin ſi rectâ concurrerent, tunc duabus illis lineis in unam coaleſcentibus angulus evaneſceret.

Per breviſſimam autem linearum remotionem angulus diſtinguitur ab illa remotione, qua laterum partes inter ſe diſtant, illa etenim remotio alia, atque alia evadit creſcentibus longitudine lineis, cùm contra extenſione laterum nulla angulis augmētatio, aut diminutio accedat.

Hæc autem definitio intelligenda eſt ad modum axiomatis, quo recta linea dicitur breviſſima ab uno puncto ad aliud extenſio; tunc enim intelliguntur illa puncta certo à ſe invicem diſtare intervallo; quo poſito cùm infinitæ lineæ inter illa puncta duci poſſint, unæ aliis longiores, breviſſima, quæ duci poteſt, recta vocatur. Pari ratione cùm duæ lineæ ſe ſe contingentes ſtatim à ſeparatione inter ſe diſtent, ſive aliquantulum removeantur, ut manifeſtum eſt ex ſeparationis notione, hoc poſito quia illa remotio in infinitum augeri poteſt creſcentibus longitudine lineis (nam quantò magis producuntur tantò magis dilitantur) illa minima remotio, quæ inter ipſas reperitur, angulus vocatur, non minima remotio ſimpliciter, quæ dari non poteſt, quia quantumvis exigua ponatur ſemper erit diviſibilis, ut neque recta linea breviſſima extenſio ſimpliciter dicitur, ad quam breviſſimam extenſionem etiam perveniri nequit, ſed breviſſima intra duo puncta extenſio. Atque hinc manifeſtum eſt angulum ad

punctum contactus exiſtere, quia hoc in loco minimùm removentur lineæ, quæ angulum conſtituunt.

Sed ut illa plenioris expoſitionis lucem accipiant operæpretium eſt anguli plani generationem, ortumque declarare, ſic autem ſe habet.



Sint duæ lineæ AB,& CB contingentes ſe in puncto B, & primò jaceant in continuum. Deinde AB minimū recedat ab illa directa poſitione, ita ut AB fiat DB, per minimam illam deflexionem lineæ DB, à directo tramite lineæ CB, qui eſt AB generabitur angulus DBC; & ſi adhuc moveri intelligatur AB, quæ jam facta eſt DB, itaut paulatim perveniat ad EB, deinde ad FB, & ſic continuetur moveri donec ipſam CB attigerit, manifeſtum eſt omnes angulos, qui à rectis lineis fieri poſſunt, hac ratione orituros, qui eò minores continuè evadent quò magis DB ab AB recedet, hoc eſt quò magis DB à directa cum BC poſitione deflectet. Atque hic eſt verus anguli ortus, ex quo ſingulæ ejus proprietates eluceſcunt.

Nam 1° quia linea DB, manente alterâ extremitate fixâ in B, circa illud punctum B circumducitur, procul dubio circulariter movetur: & quia illo motu ſuo deſcribit omnes angulos rectilineos, qui omnes ad punctum B formantur, patet quod vera, & genuina anguli menſura ſit linea circularis, quæ deſcribitur à recta DB, angulorum formatrice.

Patet etiam anguli amplitudinem, ſive quantitatem eſſe partem illam circumferentiæ, ſive potius eſſe partem illius ſpatii quod angulare punctum proxime ambit, à lateribus angulum continentibus interceptam: & quia linea ABC terminus eſt, ſive limes ad quem ſtatimatque formatrix angulorum linea pervenit, anguli forma aperit, melius erit propterea anguli quantitatem ex proportione ad ſemicircumferentiam, quàm ex proportione ad totum ambitum metiri.

Patet inſuper linearum remotionem, quæ in angulo conſideratur, longe aliam eſſe ab ea remotione, quâ disjunctæ duæ lineæ ſimpliciter inter ſe diſtant; ſimplex enim hæc remotio purum eſt duarum rerum à ſe invicem omninò diſtantium intervallum, quod certè rectâ lineâ menſuratur, quoniam ſimplici lineæ in longitudinem fluxu producitur. At angularis remotio veſtigium eſt lineæ, non ſolùm in longitudinem fluentis, verùm etiam in orbem ſe ſe circa punctum moventis; unde talis diſtantia ex recto & orbiculari motu producta cùm ſit, ideò à ſola recta linea menſurari nequit. Propter hanc remotionis diverſam acceptionem meliùs fortaſſe definiretur angulus planus dicendo eum eſſe partem orbitæ punctum circumdantis, à magnitudinibus ad illud punctum collectis, & non in continuum poſitis interceptam.

Ampliùs manifeſtum eſt quomodo planus augulus circuli pars dici poſſit, quomodo in puncto ferè conſiſtat, quomodo diſtantia ſit longitudinis latitudiniſque particeps, aut aliquid medium inter lineam & ſuper ficiem, aut conjunctio lineæ cum ſuperficie, & cur recta plures angulos ad idem punctum conſtitutos metiri non poſſit, quæ omnia ex præcedentibus nota ſunt, nec ullâ indigent explicatione.

DE USU ANGULI.

Non minus utilis eſt angulus ad aream figurarum inveniendam quàm ſunt ipſæmet lineæ, hoc tantùm diſcriminis eſt quod cognitis ſolummodo regularis alicujus figuræ lateribus tota figuræ area dignoſcitur, non verò cognitis ſolis angulis; ratio hujus rei manifeſta eſt, quia videlicet anguli latera augeri, minuique poſſunt nullâ factâ in angulo mutatione; unde quandoque accidit ut, verbi gratiâ, duo triangula, licet æquiangula ſint, inæqualia tamen habeant latera; nulla verò æquilatera ſunt quin ſimul æquiangula exiſtant; ſed anguli, & linearum conjuncto ſimul beneficio abſtruſiſſima quæque rimantur Mathematici: Quin etiam utriuſque uſus eſt reciprocus, nam ex angulis latera, & ex lateribus figurarum anguli dignoſcuntur.

DEFINITIO IX.

Angulus denominatur ab earum quibus continetur magnitudinum ſpeciebus.

ITAQUE ſi rectis lineis comprehendatur, rectilineus, ſi curvis, curvilineus, ſi curva & recta mixtilineus vocabitur.

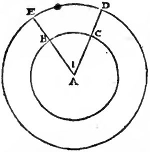
DEFINITIO X.

Anguli amplitudo menſuratur ab arcu circuli, qui ex vertice anguli tamquam centro per ipſius latera deſcribitur.

ITAQUE angulus angulo æqualis eſt quando deſcriptis æqualibus circulis ab utriuſque anguli verticibus tanquam centris arcus inter ipſorum latera comprehenſi æquales ſunt, inæquales autem quando tales arcus contingit eſſe inæquales; cur autem angulus ab arcu circuli menſurari debeat, jam docuimus in definitione anguli.

COROLLARIUM.

Ex hac ſic explicata $\angle^{li}$ menſuratione apertè colligitur $\angle^{li}$ cujuſvis latera tantò magis dilatari, quantò magis producuntur.



Ut $\angle^{li}$ 1 latera A B, A C, producta uſque ad E, & D, ibi magis dilatantur, quàm ad B, & C.

OSTENSIO.

Quoniam idem $\angle^{lus}$ 1 menſuratur ab arcu B C, & ab arcu E D, erit igitur eadem ratio arcus B C ad totam ſuam circumferentiam, quàm arcus E D ad ſuam. Sed circumferentia circuli AED major eſt circumferentia circuli ABC. Ergo arcus E D major eſt

arcu B C; (nam permutando ut peripheria ad peripheriam, ſic arcus ad arcum). Igitur latera AD, AE magis dilatantur ad E, & D, quàm ad B, & C. Quod erat oſtendendum.

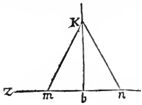
DEFINITIO XI.

Recti ſunt anguli, qui à perpendicularibus, obliqui verò qui ab obliquis ad ſe invicem lineis comprehenduntur, quorum, qui recto major eſt, obtuſus; qui verò minor, acutus, dicitur.

DEFINITIO XII.

Quando ſumptis in aliqua recta linea duobus punctis altera linea ſuperveniens ſic cadit in medium ipſorum, ut ubique in hujus medii ſitu reperiatur, ſive quod idem eſt, ut æqualiter ubique ſumptis interjiciatur punctis, incidens illa perpendicularis vocatur ad ſubjectam.

Vel etiam, *Perpendicularis linea dicitur, quæ per rectam ſive indeflexam incidentiam alteri lineæ ſupervenit, obliqua verò quæ per deflexam, ſive inclinatam.*



Ut in appoſito diagrammate quando ſumptis in recta *z m b n* duobus punctis *m*, & *n* altera linea ſuperveniens *b k* ſic cadit in ipſorum medium *b*, ut ubique in hujus medii ſitu reperiatur, hoc eſt ut quodlibet ejus punctum *k* ab extremis *m*, & *n* æquidiſtet, tunc recta *k b* perpendicularis erit ad ſubjectam *z m b n*.

DE NATURA PERPENDICULARIS.

Ut æqualitas rectitudinis, ita rectitudo perpendicularitatis generatrix eſt. Nam ut recta linea produci concipitur fluxu puncti ad aliud punctum æquabiliter lati, ita perpendiculum optimè concipietur produci fluxu puncti cujuſque lineæ medii, & ſuper ipſam per indeflexum ab extremis tramitem lati, qui trames

indeflexus

indeflexus nihil aliud eſt quàm rectitudinis veſtigium, ut ad definitionem rectæ lineæ oſtenſum eſt. Itaque perpendicularis, quantumvis producta ſemper manet perpendicularis, quoniam ubique in rectitudinis veſtigio poſita reperitur; ac quemadmodum indeflexus puncti tranſitus ab uno termino ad alium procreat rectam, ſic indeflexa lineæ in lineam incidentia generat perpendicularem.

Hinc apparet rectitudinem, quæ in recta linea conſideratur, ſimpliciſſimam eſſe, ac veluti primariam, ut pote quæ abſoluta ſit, & abſque ullo reſpectu: contra verò, rectitudinem, quæ perpendiculari ineſt, compoſitam, ac ortam dici debere; illa etenim ad aliam reſpectiva cùm ſit, componitur ex duabus inter ſe mixtis rectitudinibus. Quare cùm rectitudo æqualitas quædam ſit, duplicabitur æqualitatis ratio adjuncta ad rectam lineam perpendiculari, quæ perpendicularis alia rectitudo eſt ut vidimus. Itaque perpendicularitas haud malè duplicata rectitudo vocabitur.

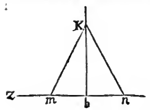
Ex hac autem ſic explicata perpendicularis lineæ natura ſequentia corollaria deducuntur.

COROLLARIUM I.

Duæ rectæ ab eodem puncto perpendiculi ad duo ſubjectæ lineæ puncta, æqualiter ab incidentiæ puncto hinc inde diſtantia ductæ invicem æquantur.

DEMONSTRATIO.

Sic enim quodlibet punctum $\perp^{li}$ in medio ſubjectæ inter aſſumpta puncta contentæ poſiti, ab illis æquidiſtat, & conſequenter rectæ lineæ, quæ diſtantijs ſuis coæquantur à quolibet puncto $\perp^{li}$ ad aſſumpta puncta protractæ, inter ſe æquales ſunt.



Digitized by Google

COROLLARIUM II.

Si duæ æquales rectæ ab extremis alterius exeuntes ſuper ipſam concurrant, concurſus punctum in perpendiculo ad ſubjectæ medium erecto poſitum eſt.

DEMONSTRATIO.

Solæ rectæ à punctis æqualiter diſtantibus ductæ inter ſe æquales ſunt. Ponuntur autem concurrentes rectæ æquales; ergo punctum illarum concurſus ab extremis ſubjectæ æquidiſtat, & conſequenter in elevato ſubjectæ lineæ medio, ſive in ⊥^lo^ ad ſubjectæ lineæ medium erecto, in quo nempe omnia puncta ab extremis ſubjectæ æquidiſtantia poſita ſunt, reperitur, ut erat oſtendendum.

COROLLARIUM III.

Si quatuor æquales rectæ, ab extremis duarum æqualium rectarum exeuntes, ſuper ipſas ad duo puncta concurrant, intercepta ab his punctis ad ſubjectas perpendicula æqualia ſunt; ſi verò æquales rectæ æqualia habeant perpendicula, ſive ad media, ſive ad earum extremitates erecta, perpendiculorum fines, cum earum finibus connectentes rectæ inter ſe æquales ſunt.

DEMONSTRATIO PRIMÆ PARTIS.

Subjectarum media puncta ab extremis ſuis punctis æquidiſtant, propter poſitam in ſubjectis lineis æqualitatem; eademque media puncta ſurſum, ut explicatum eſt, mota, ideſt puncta, ubi ſupraſtantes lineæ conveniunt, ab iiſdem extremis adhuc æquidiſtant, nimirum propter poſitam in ſupra ſtantibus lineis æqualitatem: ac per explicatas punctorum mediorum elevationes ipſorum mediorum ab extremis diſtantiæ creſcunt, ut in antecedente vidimus; Igitur mediorum ab extremis æquidiſtantiæ, in ſubjectis lineis primò repertæ, aliis æquidiſtantiis, à mediorum elevationibus ortis, crevêre. Non poſſunt autem diſtantiæ à mediorum elevationibus ortæ inter ſe æquari, niſi puncta illa media ſupra ſubjectas

æquè altè eleventur: nam quò altius feruntur, eò majores ſunt mediorum ab extremis diſtantiæ. Igitur mediorum ab extremis æquidiſtantiæ, in duabus ſubjectis æqualibus repertæ, ab eadem, vel æquali mediorum ſuper ipſas altitudine producuntur.

Quapropter puncta, ubi ſupraſtantes æquales, ſuper ſubjectas, etiam æquales ductæ conveniunt, videlicet mota ſubjectarum media propter allatas rationes æquè altè elevari, ſive, quod idem eſt, ipſa perpendicula, quorum magnitudines à mediorum altitudinibus determinantur, inter ſe æquari neceſſe eſt.

Eodem modo probabitur, ⊥la, quamvis ad æqualium ſubjectarum extremitates erecta, æqualia inter ſe fore, exiſtente in connectentibus æqualitate. Productis enim in duplum ſubjectis æqualibus, (quod facilè fiet earum intervallo, & ab earum extremitatibus circulos deſcribendo) jam erunt nominata ⊥la ad media ſubjectarum erecta. Unde ductis à productionum finibus ad extrema ⊥lorum aliis connectentibus, probabitur, ut ſuperiùs, intercepta à connectentium interſectione ad ſubjectas ⊥la invicem æquari.

2°. Æquales rectæ æqualia habeant perpendicula, vel ad media, vel ad extremitates poſita.

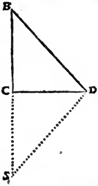
DICO Connectentes rectas inter ſe æquari.

DEMONSTRATIO SECUNDÆ PARTIS.

Ex hypotheſi ſubjectarum media ab extremis, vel extrema ab extremis æquidiſtant, propter poſitam in ipſis ſubjectis æqualitatem; hæ verò diſtantiæ aliis æquidiſtantiis à perpendicularibus, per hypotheſim æqualibus, ortis augentur: ſurgentia itaque ab his diſtantiis inter ſe conjunctis intervalla, id eſt connectentium longitudines, atque adeò connectentes ipſas inter ſe æquari neceſſe eſt.

APPENDIX.

Subjecta linea eſt ad ſuum perpendiculum invicem perpendicularis.



DATUM.

Eſto recta C D ſubjecta, cum ſuo $\perp^{lo}$ BC.

QUÆSITUM.

Oportet oſtendere ſubjectam C D perpendicularem eſſe ad ſuum $\perp^{um}$ B C.

PRÆPARATIO.

Intelligatur $\perp^{um}$ BC in duplum productum ad S, ita ut punctum C medium ſit totius B S, & connectatur DS.

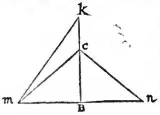
DEMONSTRATIO.

Perpendicularis BC, quantumvis producta, ſemper manet ad ſuam ſubjectam perpendicularis, ut oſtenſum eſt initio hujus definitionis. Erit igitur recta C S perpendicularis ad rectam CD. Quare cùm ad æqualem vel potiùs ad eandem CD, & ad ejus extremum C æqualia $\perp^{la}$ BC, & C S erecta ſint, propterea horum perpendiculorum fines B & S cum ſubjectæ fine D, connectentes rectæ B D, & S D æquales ſunt (*ex 2ª parte hujus Corollarii*), quæ cùm ſupra ſubjectam BS in puncto D conveniant, erit coincidentiæ punctum D in $\perp^{lo}$ ad medium ſubjectæ B S, hoc eſt ad punctum C, erecto; & conſequenter recta C D per puncta C, & D tranſiens, perpendicularis eſt ad B C, ut erat oſtendendum.

COROLLARIUM IV.

Quæ ab extremitatibus ſubjectæ ducuntur ad aliquod perpendiculi, in medio ejuſdem ſubjectæ erecti punctum, majores ſunt ipſius ſubjectæ medietatibus; & tantò majores evadunt, quantò perpendiculi punctum in quo concurrunt à medio ſubjectæ remotius eſt.

DEMONSTRATIO.



Dum enim in $\perp^{li}$ generatione punctum lineæ medium elevatur, neceſſariò recedit ab illa linea, à qua elevari incipit: & quia in illa elevatione ſemper æquidiſtat ab extremis ſubjectæ lineæ; id-

Digitized by Google

æquidiſtanter ab illis ſurſum ſe movendo recedit. Quare cùm per receſſum à terminis diſtantia augeatur, tantòque major evadat, quantò longior fit remotio, rectæ, quæ diſtantiis ſuis coæquantur, tantò longiores erunt, quantò remotius à $\perp^{li}$ puncto, ſubjectæ lineæ medium efficiente, (ubi nulla eſt adhuc elevatio) coïbunt; & vice verſâ tantò breviores erunt, quantò propiùs ad illud punctum accedent. Quare cùm ſubjectarum linearum medietates ad illud punctum, hoc eſt ad medium ſui coëant, ipſæ erunt breviſſimæ quæ ab eiſdem extremis ad idem $\perp^{um}$ duci poterunt.

APPENDIX.

Rectarum à ſublimi puncto in ſubjectam rectam cadentium breviſſima eſt perpendicularis, reliquæ verò tantò longiores ſunt, quantò longiùs à perpendiculo diſtant.

Nam per antè probata $\perp^{um}$ pro ſubjecta, & vice verſâ ſubjecta pro perpendiculo ſumi poteſt, atque adeò per antecedentem id quod propoſitum eſt demonſtrabitur.

COROLLARIUM V.

Ab eodem puncto unicum ad eandem lineam perpendiculum duci poteſt.

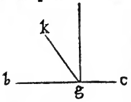
DETERMINATIO CASUUM.

Punctum illud vel erit in data linea, vel ſupra ipſam exiſtet.

Sit primò in data linea.

DEMONSTRATIO IN 1° CASU.

Acceptis hinc inde in ſubjecta linea duobus punctis,



æquidiſtantibus ab eo puncto, ubi talis ſubjecta tangitur ab erectis (ſi plura eſſe dicantur) perpendiculis, hæc perpendicula ubique in medio ad ſubjectam ſitu reperiri debent (ex definitione $\perp^{li}$) verùm quia per diverſas vias tranſirent; ideò diverſa forent ejuſdem lineæ media, quod eſt impoſſibile ex notione medii. Et verò

ſicut in aliqua linea unicum punctum in medio ſitum reperitur, quod ab extremis hujus lineæ æquidiſtat; ita etiam ſupra aliquam rectam lineam unica linea in ſubjectæ medio ſitu exiſtit, cujus puncta quælibet ſeorſim ſumpta ab extremis ſubjectæ æquidiſtant.

DEMONSTRATIO IN 2°. CASU.

Jam ſit punctum ſupra datam lineam; & ab eo in ſubjectam lineam cadant, ſi fieri poteſt, duæ perpendiculares, erunt illæ per antecedentem minimæ rectarum ab accepto puncto in nominatam ſubjectam ductilium; cum tamen ſumptâ unâ pro 1ᵒ; altera ab hoc 1ᵒ diſtet, ac propterea ipſo perpendiculo longior eſſe debeat, per eandem antecedentem. Quamobrem unica è ſublimi puncto in ſubjectam rectam breviſſima, ideſt, unicum perpendiculum duci poteſt, ut volebat propoſitio.

COROLLARIUM VI.

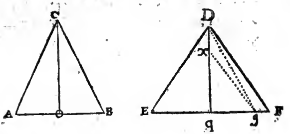
Duæ æquales rectæ à ſubjectæ extremis ad perpendiculum in ejus medio ſitum, & verſus eandem partem protenſæ ad idem punctum concurrunt.

DEMONSTRATIO.

Nam ſi ad diverſa concurrerent, unum neceſſariò propiùs eſſet puncto in ſubjecta linea medio; & ſic, ut ex probatis conſtat, una minor evaderet alterâ, quod hypotheſim deſtruit.

COROLLARIUM VII.

Si quatuor æquales rectæ ab extremis duarum inæqualium rectarum exeuntes ſuper ipſas concurrant, perpendiculum, quod à concurſu duarum ſupra minorem lineam exiſtentium in illam minorem cadet, majus erit perpendiculo, quod à concurſu duarum aliarum, ſupra majorem exiſtentium, in illam majorem demittetur.



DATUM.

Sunto ſubjectæ inæquales, A B ꞁ & E F ꜰ, à quarum extremis A, B, E, F quatuor æquales rectæ A C, B C, E D, F D prodeuntes contingant ſe binæ in punctis C & D.

QUÆSITUM.

Oportet oſtendere $\perp^{lum}$ OC, quod à concurſu duarum æqualium A C, & B C in minorem ſubjectam AB deſcendit, majus eſſe $\perp^{lo}$ D q, à concurſu duarum æqualium rectarum E D, F D, in majorem ſubjectam E F incidente.

DEMONSTRATIO.

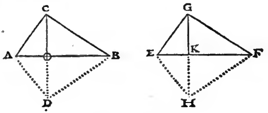
Si perpendicula C O, & D q dicantur æqualia; Quia recta AB minor ponitur rectâ E F, ideò medietas OB minor eſt medietate q F; Quamobrem ablata recta OB, à majori q F, remanebit aliqua ejus pars, quæ ſit g F. Itaque recta D g æquabitur rectæ CB. Nam rectæ lineæ OB, q g jam ſunt æquales ob ſublatam g F differentiam. At ex hypotheſi tam $\perp^{la}$ CO, & Dq quàm rectæ CB & DF invicem æquantur. Ergo rectæ Dg & DF æquales ſunt. Quod eſt abſurdum (*per coroll.* 3um) quoniam ab eodem puncto D, ad idem $\perp^{um}$ q F ducta DF tangit ipſam q F in puncto F, remotiori ab incidentiæ puncto, quàm eſt ipſum punctum g, ad quod pertingit ducta D g.

Jam ſi $\perp^{um}$ C O minus dicatur $\perp^{lo}$ Dq, ablata recta O C, à majori q D remanebit aliqua ejus pars, quæ ſit D X. Ductâ itaque rectâ g X æquabitur rectæ CB. Nam q X & C O jam ſunt æquales ob ſublatam DX differentiam. Recta autem q g, per eandem conſtructionem, poſita eſt æqualis O B, & per hypotheſim recta CB eſt

etiam æqualis DF. Ergo g X æquatur DF. Quod eſt abſurdum, (*per corol.* 3um) nam recta g X minor eſt recta D g, quæ adhuc ipſa DF minor eſt. Quum igitur $\perp^{um}$ CO nec æquale, nec minus eſſe queat $\perp^{o}$ D q, ſupereſt ut ipſo majus ſit. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM VIII.

Si ſuper aliquam rectam duæ rectæ, ab ejus extremitatibus ductæ, concurrant, deturque alia recta, lineæ primò poſitæ æqualis, ſupra quam etiam duæ aliæ, ab ejus extremis ductæ, concurrant, quæ lineis ſupra primam coeuntibus ſigillatim æquales ſint, cadentia à punctis concurſus in ſubjectas perpendicula æquantur inter ſe, & nominatas ſubjectas dividunt in partes, ſingulas ſingulis æquales.



DATUM.

Sunto duæ æquales ſubjectæ A B & E F, à quarum extremis A, B, E, F ductæ lineæ A C, B C, E G, F G ſigillatim æquales concurrant ad puncta G & C, à quibus in ſubjectas cadant $\perp^{la}$ C O, & G K.

QUÆSITUM.

Oportet oſtendere $\perp^{um}$ C O Π $\perp^{lo}$ G K, & ab ipſis $\perp^{lis}$ ſubjectas A B, & E F dividi ad puncta O, & K in partes ſigillatim æquales, hoc eſt rectam A O Π rectæ E K, & rectam O B Π rectæ K F.

PRÆPARATIO.

Intelligantur perpendicula CO, GK in duplum producta ad puncta D, & H, itaut puncta O & K jam ſint media rectarum C D, & GH. Deinde à punctis D & H ad

ad ſubjectarum extrema A, B, E, F connectentes AD, BD, EH, FH ductæ cogitentur.

DEMONSTRATIO.

Rectæ AC. AD, (*per* 1um *corol.*) æquantur inter ſe, quoniam ab eodem puncto A, in perpendiculo A O aſſumpto, ad duos ſubjectæ C D fines, nimirum ad puncta C, & D, ab incidentiæ puncto O æqualiter diſtantes, ductæ ſunt. Idem probabitur de connexis BC & BD, nec non de alis EG & EH, atque etiam de reliquis FG, & FH ut patet. Sunt ergo AC, AD, EG, EH æquales inter ſe, atque etiam BD, BC, GF, FH invicem æquales.

Jam verò ſi $\perp^{la}$ CD, & GH inæqualia dicantur, ſit $\perp^{lum}$ GH F $\perp^{lo}$ C D. Quoanim igitur quatuor æquales rectæ AC, AD, E G, E H ſupra rectas inæquales CD, & GH concurrunt, $\perp^{lum}$ EK, à concurſu duarum EG, EH, ſupra rectam GH, ex hypotheſi majorem, erectum, minus erit $\perp^{lo}$ AO, quod à concurſu duarum AC, AD, in ſubjectam CD, ex hypotheſi minorem, cadit. Eodem modo probabitur $\perp^{um}$ KF⊓ $\perp^{o}$ OB, ut manifeſtum eſt. Igitur tota E F⊓ tota AB, quod hypotheſim deſtruit, propterea cùm $\perp^{la}$ CD, & GH inæqualia eſſe nequeant, reſtat ut æqualia ſint, & conſequenter eorum medietates C O, & GK, invicem æquales erunt; ſed probatum eſt connectentes AC, AD, EG, EH inter ſe æquari, ergo (*per corol.* 6um) $\perp^{um}$ A O Π $\perp^{lo}$ EK, quare & reliqua OBΠ reliquæ K F; Ideoque ſubjectæ AB & EF in partes ſigillatim æquales à nominatis $\perp^{lis}$ C O, G K dividuntur ad puncta O, & K, ut erat oſtendendum.

DE USU PERPENDICULARIS.

Quandoquidem linearum, ab eodem puncto in ſubjectam lineam ductilium, ſola perpendicularis ordinata eſt, ut pote breviſſima, per allatas rationes, hac de cauſa ſola perpendicularis menſurandis linearum diſtantiis, determinandiſque ſpatiorum, figurarum, atque corporum altitudinibus, ac profunditatibus naturâ ſuâ idonea eſt: hæc eadem rectis lineis, circulorum arcubus, anguliſque

æquibiſecandis, nec non mediis proportionalibus inveniendis abhibetur, ut ſuo loco oſtendemus; & ut uno verbo cuncta ejus officia complectar bona pars propoſitionum geometricarum perpendicularis auxilio indiget, vel ad conſtructionem, vel ad demonſtrationem.

DEFINITIO XIII.

Quando perpendiculum, in quo ſumpta fuerint aliqua puncta tranſverſim, & utrimque ſupra ſubjectam ſuam moveri ſic intelligitur, ut a directo cum ea ſitu nuſpiam in motione ſua deflectat, accepta puncta cum dicto perpendiculo lata fluxu ſuo rectas deſcribent, quæ tum inter ſe, tum ad ſubjectam parallelæ, ſive æquidiſtantes vocantur.

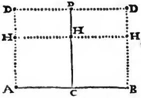
Vel ſic, *Parallelæ, ſive æquidiſtantes lineæ dicuntur, quæ cùm inter ſe diſtent, nuſquam tamen ad ſe invicem accedunt, aut à ſe invicem recedunt, ſed per æquidiſtantia ſemper intervalla porriguntur.*

Vel adhuc, *Parallelæ, ſive æquidiſtantes lineæ dicuntur, inter quas æquialtum ubique mediat intervallum.*

QUARE paralleliſmus ſive æquidiſtantia eſt in magnitudinibus, quovis intervallo à ſe invicem diſtantibus invariatio, ſive immutabilitas diſtantiæ per totam intervalli latitudinem; vel eſt perpetuus ejuſdem diſtantię tenor, per totam exiſtentis inter ſemotas magnitudines ſpatii latitudinem altitudinemve conſtantiſſimè ſervatæ.

EXPLICATIO.

Eſto ⊥um CD, ſupra baſim AB erectum, in quo ſumantur quotlibet puncta H & D. Dictum autem ⊥um CD tranſverſim, hoc eſt ſecundùm ſuam longitudinem, & utrimque, nimirum verſus oppoſitas partes A & B, ſupra nominatam rectam AB intelligatur ea lege moveri, ut à directo cum ea ſitu nuſpiam



in ſua motione deflectat; ſive quod idem eſt, ut rectos angulos cum ſubjecta A B ſemper efficiat. Perveniat autem ſic motum $\perp^{lum}$ C D ad puncta A & B, ubi ſupraſtantium linearum AD & B D loca repleat, ſive per eas in acquiſito ſitu repræſentetur: Atque ex ſumptorum punctorum H & D, cum dicto $\perp^{lo}$ C D latorum veſtigiis oriantur lineæ H H H, & D D D. Manifeſtum eſt ex appoſita motus conditione ſubjectam A B, & exortam H H H ubique inter ſe æquidiſtare, quoniam idem perpendiculum C H, per totam interjecti inter lineas A B, & H H H ſpatii longitudinem normaliter motum, extremis ſuis C & H ipſas A B & H H H ubique attingit, hoc eſt æquales ubique diſtantias inter lineas A B, H H H, determinat; idem dicetur de ſubjecta A B, & exorta D D D, nimirum ipſas æquidiſtare inter ſe, ut patet. Tales itaque deſcriptæ lineæ, eandem inter ſe diſtantiam ubique ſervantes, parallelæ, ſive æquidiſtantes meritò dicuntur; ipſas autem eſſe rectas minimè dubium eſt, cùm earum omnia puncta eandem cum extremis altitudinem obtineant, quemadmodum recta A B; ſi enim aliquod exortæ lineæ H H H punctum intermedium extremis altiùs, aut depreſſiùs eſſet, ſequeretur $\perp^{lum}$ C H F, aut ┐ eſſe $\perp^{lo}$ A H vel B H, contra ſuppoſitum generationis hujus lineæ modum; idem puta de linea D D D. Evidens quoque eſt, rectâ A B in infinitum productâ, & factâ eâdem deſcriptione, exortam H H, in infinitum etiam abeuntem paralleliſmum ubique ſervaturam cum ipſa A B; Ideoque parallelæ lineæ quamvis in infinitum productæ ſemper manent parallelæ.

DE USU PARALLELARUM.

Parallelarum uſus tam latè extenditur, quàm ipſius perpendiculi earum generatoris; nam ſi perpendiculi ope inter duas datas rectas una media proportionalis invenitur, parallelarum auxilio ad tres datas rectas quarta proportionalis apponitur: ipſæ eædem parallelæ rectis lineis proportionaliter ſecandis adhibentur; & quoniam

Digitized by Google

in univerſa Mathematicarum ſcientiarum conſtitutione, licet diverſa objecta reſpiciant, ſolæ proportiones, quæ in iis reperiuntur, conſiderantur, omnia enim ad menſuram, quæ proportiones in conceptu ſuo involvit, revocantur, manifeſtum eſt parallelarum, à quibus linearum proportio efficitur, atque determinatur, uſum in geometricis immenſum eſſe.

DEFINITIO XIV.

Terminus eſt quod alicujus rei extremum eſt.

DEFINITIO XV.

Figura eſt quæ ſub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.

DEFINITIO XVI.

Circulus eſt figura plana, ſub unica linea puncto medio æquidiſtante comprehenſa; illa autem linea circumferentia, & punctum medium circuli centrum dicitur.

Aut ſi ad circuli generationem attenderimus, ſic ipſum definiemus.

Circulus eſt figura plana, quæ deſcribitur à recta linea finita circa unum extremum quieſcens circumducta, donec in eumdem locum, unde moveri primum inceperat, reſtituta fuerit.

Atque hinc patet rectas omnes, à centro ad circumferentiam extenſas, invicem æquales eſſes.

DEFINITIO XVII.

Diameter autem circuli eſt recta linea per centrum ducta, & ex utraque parte in circuli peripheriam terminata.

DEFINITIO XVIII.

Segmentum circuli eſt figura, quæ ſub recta linea, & circumferentiæ parte comprehenditur, quæ quidem circumferentiæ pars, arcus vocatur; & ſi recta linea peripheriam ſubtendens per centrum tranſeat, factum ſegmentum ſemicirculus dicitur.

DEFINITIO XIX.

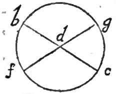
Sector circuli eſt circuli pars, ſub duobus radiis, à centro exeuntibus, & ſub arcu, inter duos illos radios intercepto, comprehenſa, ut b d g.

POSTULATUM.

Quoniam circulus, ut ex ejus geneſi apparet, ſimpliciſſimo rectę lineę, in orbem circa unum quieſcens extremum fluentis motu, ſine arte fit; & recta linea cujuſvis longitudinis ſumi poteſt, ut ad rectæ lineæ definitionem annotavimus; Ideo jure optimo.

Poſtuletur ut à quovis centro & intervallo circulum deſcribere concedatur.

Ampliùs quoniam æqualium rectarum circa manentia puncta volutiones ſpatia claudunt, quorum extrema, ſive circumferentiarum puncta omnia à ſuis mediis æquidiſtant (diſtãtias enim illas, ęquales rectæ lineæ ſive æquales radii, metiuntur) eſtque diameter dupla radii. Igitur



COROLLARIUM I.

Circuli ſunt æquales, quorum radii, vel diametri ſunt æquales.

Deinde quia in generatione circuli, volutus circa manens punctum radius uniformi, & æquali motu fertur, conſequens omninò eſt ut æqualia ſpatia temporibus

Digitized by Google

æqualibus, vel æqualibus lationibus percurrat; qualibet autem latione, vel quolibet momento temporis dictus circuli genitor radius, à quiete exiens, angulum ad centrum efficit, qui tantò major evadit, quantò major ſit radii motio; quando igitur anguli ad centrum ſunt ęquales neceſſe eſt radii lationes æquales fieri, & conſequenter decurſa ab ipſo ſpatia eſſe etiam æqualia. Quare

COROLLARIUM II.

Ejuſdem vel æqualium circulorum ſectores, quorum latera æquales angulos continent, inter ſe æquales ſunt.

Ut in appoſito diagrammate ſector f d b æquatur ſectori c d g quia $\angle^{lus}$ b d f $\sqcap$ $\angle^{lo}$ g d c.

Nam ſectores nihil aliud ſunt quàm illa ſpatia à radio circumacto decurſa.

Et verò ſi $\angle^{lis}$ b d f, & g d c poſitis æqualibus fieri poſſet ut ſectores f d b, & c d g inæquales eſſent, procul dubio ſupra rectam d c, quæ eſt æqualis d f deſcribi poſſet ſector æqualis ſectori b d f, qui idem ſpatium non clauderet, quàm ſector. g d c; quoniam illi ſectores inæquales eſſe ponuntur; quod cùm impoſſibile ſit, eo quod circuli ſicut rectæ lineæ generatio ſimpliciſſima ſit, ſive pluribus modis fieri nequeat, neceſſariò ſequitur propoſitos ſectores b d f, & g d c, angulos ad d æquales habentes, inæquales eſſe non poſſe, erunt ergo æquales, ut vult corollarium.

Adhuc quia circuli periphæria oritur ex fluxu puncti, uniformi & æquali motu, ſive æquidiſtanter circa aliud manens punctum lati, illa erit ubique ſibi ſimilis, & naturæ ſimpliciſſimæ, plures in ſpecies individuæ; nam motus uniformitas & æqualitas nullam in ſe variationem recipit; Ideoque in eodem, vel æqualibus circulis periphæriæ partes, ſive arcus, quorum extrema æquidiſtant, inter ſe æquales ſunt; illos enim eodem modo inter extrema diſtendi, ſive per æquales vias tranſire neceſſe eſt, cùm pluribus modis fieri nequeant. Itaque

Digitized by Google

COROLLARIUM III.

In eodem, vel æqualibus circulis æquales rectæ æquales arcus abſcindunt.

Et verò ſi fieri poſſet ut ab æqualibus rectis lineis duo ejuſdem, vel æqualium circulorum ſubtenſi arcus, inæquales eſſent, procul dubio ſuper una ex æqualibus lineis deſcribi poſſet alius ejuſdem circuli arcus, alteri arcui çqualis, cujus ſaltem aliqua pars ſupra, vel intra arcum, ab accepta recta linea ſubtenſum, tranſiret, (nam cum arcus illi ponantur inæquales, per eandem omninò viam tranſire non debent,) & ſic ſequeretur ejuſdem circuli radios inter ſe inæquales fore, quod repugnat naturæ circuli.

APPENDIX I.

Ejuſdem vel æqualium circulorum ſegmenta, æquales baſes habentia, inter ſe æqualia ſunt.

Nam, ut probatum eſt, deſcriptus ſuper una ex æqualibus baſibus propoſiti cujuſlibet ſegmenti arcus per eandem omninò viam tranſiret, quàm arcus illius ſegmenti, ſuper accepta baſi exiſtentis; ideoque idem ſpatium ambo clauderent.

DE USU CIRCULI.

Longum eſſet recenſere omnes circuli proprietates; nec ſatis commodus hic locus eſt ad eas enumerandas. Quare monuiſſe ſufficiat in geometricis nihil utilius eſſe circulo. Hinc igitur omne principium, huc refer exitum.

DEFINITIO XX.

Figuræ denominantur à linearum quibus illæ continentur ſpeciebus, vel à numero laterum angulorumve.

Sic à linearum ſpeciebus figuræ Rectilineæ, vel Curvilineæ vocantur. A numero laterum Trilateræ, Quadrilateræ, Multilateræ. A numero angulorum Triangulæ, vel Trigonæ, Quadrangulæ, Pentagonæ, &c.

DEFINITIO XXI.

Trilateræ porrò figuræ denominantur à laterum æqualitate, aut inæqualitate; vel ab angulorum ſpeciebus.

Sic à laterum æqualitate vel inæqualitate Triangulum Æquilaterum dicitur, quod tria latera habet æqualia; Iſoceles, ſive Æquicrure, in quo duo tantùm latera ſunt æqualia, tertio exiſtente majore, vel minore; Scalenum verò, cujus tria latera ſunt inæqualia. Ab angulorum verò ſpeciebus Triangulum Orthogonium, vel Rectangulum dicitur, quod unum angulum habet rectum; Ambligonium, vel Obtuſiangulum, quod unum habet obtuſum; Oxygonium autem, ſiue Acutiangulum, quod tres acutos habet angulos.

DEFINITIO XXII.

Quadrilaterarum autem figurarum parallelogramum eſt cujus bina oppoſita latera ſunt parallela: Quadratum verò quod æquilaterum & rectangulum eſt; rombus autem figura æquilatera, ſed non rectangula; altera parte longius rectangulum eſt, at non æquilaterum, & ſæpiſſimè rectangulum ſimpliciter vocatur. At romboides figura eſt, quæ adverſa latera & angulos habens inter ſe æquales, neque æquilatera eſt neque rectangula.

DEFINITIO XXIII.

Rectangulum contineri dicitur ſub duabus lineis, angulum rectum continentibus.

▭um enim oritur ex fluxu lineæ rectæ ſuper aliam rectam perpendiculariter motæ; & quia fluxus ille maximè ęquabilis eſt, & uniformis, hinc fit ut rectangula, quorum baſes, & ſupraſtantia perpendicula ſigillatim ſumpta ęqualia ſunt, invicem ęquentur, eodem enim motu, & ęqualibus factoribus ambo generantur.

MONITUM.

MONITUM.

Quando definitione 8ª angulum eſſe dixi duarum, pluriumve ejuſdem ſpeciei magnitudinum, ad unum punctum collectarum, & non in continuum jacentium breviſſimam remotionem, dictum ſolummodo puta de lineis, & ſuperficiebus, non verò de ſolidis, ut in hujus definitionis explicatione apertè declaravi. Ideò verò generali magnitudinis voce uſus ſum, ut angulos planos, atque ſolidos unicâ definitione comprehenderem. Verùm ſi quiſpiam magnitudinis nomen malè hoc in loco uſurpatum exiſtimet, reſponſum habeat me per ullum aliud convenientius vocabulum mentem meam explicare non potuiſſe; ſed modò mecum de re conſentiat, de verbis nullam litem movebo. Fortaſſe paucis additis clarior apparebit illa eadem anguli definitio, ſi ita dicamus.

Angulus eſt duarum, aut plurium, ejuſdem (1ᵉ videlicet aut 2ᵉ) ſpeciei magnitudinum, ad unum punctum collectarum, & non in continuum jacentium breviſſima remotio, ſive diſtantia.

CAPUT QUINTUM.

De Elementis Geometricis.

FONS INVENTIONIS.

De linearum ſitu, ſive de variis linearum inter ſe poſitionibus.

INVESTIGATIO.

Quot modis linearum ſitus variari poſſit.

VEL inter ſe lineæ conjunguntur, atque coincidunt, vel aliquo à ſe invicem diſtant intervallo. Jam quæ coincidunt, obliquæ neceſſariò ſunt inter ſe, vel perpendiculares; quæ verò invicem diſtant, neceſſariò etiam parallelæ ſunt, vel imparallelæ. Unde quatuor omninò neque plures neque pauciores diſponendarum inter ſe linearum variationes inveniuntur.

M.

Quoniam autem per certas rectarum linearum motiones in geometricis cuncta fieri probavimus; manifeſtumque ſit pro diverſis motarum rectarum inter ſe poſituris effectiones inde provenientes diverſas mutationes ſubire; evidens profectò eſt ab his rectarum linearum diverſis motibus, variiſque diſpoſitionibus, velut à certis quibuſdam geometricæ facultatis elementis geometricum robur accipere quicquid in mathematicis geometricam deſiderat ſolutionem. Horum ergo geometricorum Elementorum eſto.

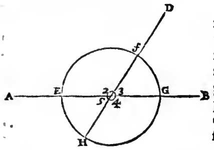
ELEMENTUM PRIMUM.

De rectarum linearum coincidentia.

FONS INVENTIONIS.

ELementaris hæc coincidentium inter ſe linearum inſtitutio neceſſariam habet cum angulorum doctrina connectionem, in eaque tota fundatur; nam ab indirecta linearum coincidentia angulum anguloſve tamquã à vera cauſa prodire ſatis apertè declarat eorum definitio. Cùm itaque angulorum procreatio præcipuus ſit qui in concurrentibus inter ſe lineis notetur effectus, ob eam cauſam primi hujus Elementi tractatio in angulorum ad mutuum linearum occurſum naſcentium contemplatione præcipuè verſatur, per illamque maximè perficitur. Quiſquis igitur angulorum naturam, ortumque, ſicut antè tradita ſunt, probè noverit, & penitùs inſpexerit, is poſteà per talem cognitionem, atque comprehenſionem quæcumque ferè de coincidentibus lineis formari poſſunt vel theoremata, vel problemata facili negotio reperiet, repertaque firmiſſimarum, & ab eodem cognitionis fonte hauſtarum demonſtrationum robore muniet. Principiorum enim diligens obſervatio viam præbet ad reliquorum omnium inventionem paratiſſimam. Quin imo qui plenam habuerit principiorum cognitionem, jam perfectam, licet nondum explicatam omnium, quæ

ab eis deduci poſſunt, ſcientiam adeptus eſt; cùm longæ illæ conſecutionum ſeries, quas diſciplinas nominamus, in fœcunditate principiorum totæ condantur, & ab ſola eorum efficaci virtute proveniant. In primis igitur allaborandum eſt, ut rectum, & quàm maximè clarum de principiis conceptum efformemus; eorum deinde naturas, & his naturis debitas proprietates accuratè examinando, quas ipſa vires, quamque potentiam ad operandum habeant parvo labore deprehendemus; unde difficile poſteà non erit varios modos excogitare, & ex iis ſimpliſiſſimos eligere, quibus ſingula quæque ab his principiis orta gignantur. Atque his duabus rebus, nimirum exactâ principiorum definitione, & ſimplicium modorum, per quos quodcumque ab eis pendet effici, & fœliciter explicari queat inventione, plena, perfectaque eorum cognitio comparatur, quâ ſemel imbutus, atque fœcundatus intellectus tanta poſteà rerum copia diteſcit, tantaque luce colluſtratur, ut connexarum invicem effectionum numeroſiſſimam multitudinem, adhibitâ præſertim in eis ordine deducendis ſolerti induſtriâ, tanquam uberrimos parturientis cognitionis fructus effundere, & ex onuſto ſinu proferre valeat.



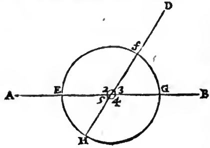
Nunc ergo ſi generatio angulorum, prout in eorum definitione explicata eſt, iterum in hac præſenti figura conſideretur, primo mentis intuitu confeſtim apparebit formatricem angulorum lineam O D, à poſitione rectæ A B exeundo, & circa coincidentiæ punctum O fluendo, donec eandem A B ad oppoſitas incepti motus partes rursùs attigerit, hac ſuâ per orbicularem ſemitam E *f* G H circumlatione ſitus omnes, qui in rectis inter ſe coincidentibus lineis obſervabiles ſunt, percurrere, (redeuntibus quippe ordine iiſdem coinciden-

tiuin inter ſe linearum ſitus variationibus, dum dicta formatrix angulorum O D ſubter ſubjectam A B, & circa punctum O defertur, quàm cùm anteà ſupra ſubjectam A B, & circa idem punctum O volvebatur, ut evidens eſt, & in unoquoque ſitu binos ad dictum coincidentiæ punctum angulos exoriri, pro quorum amplitudine decurſus arcus E*f*G integer ſemper aſſumitur. Atque hinc formatur, & confirmatur ſequens propoſitio.

PRIMA PROPOSITIO ELEMENTARIS.

Si recta ſupra rectam, & inter ejus extrema ceciderit, nec ipſam ſecaverit, duos ad coincidentiæ punctum angulos rectos, vel certè duobus rectis æquales facit; ſi verò coincidentes rectæ ſe invicem ſecuerint, quatuor ad ſectionis punctum angulos rectos, vel certè quatuor rectis æquales efficient, ex quibus bini quilibet contrapoſiti invicem æquantur. Omnes verò circa idem punctum conſtituti quatuor rectis æquales ſunt.

DATUM I.



Recta D O ſupra rectam A B, & inter ejus extrema, hoc eſt in quodcumq; punctum O, inter ejus extrema A & B poſitum, cadat, nec eam ſecet, ſed ipſam ſolummodo in dicto puncto O contingat.

QUÆSITUM.

Demonſtrandum eſt à nominatis lineis A B, & D O, juxta dictum modum coincidentibus, duos angulos 2 & 3, vel rectos, vel duobus rectis æquales, ad ipſum coincidentiæ punctum O, fieri.

CONSTRUCTIO.

Centro, O, intervallo quocumque O E fiat circulus OE*f*GH, ſecans rectas A B, O D, ſi opus eſt producťas.

DEMONSTRATIO.

Si ſuperveniens recta D O perpendicularis ſit ad ſubjectam AB, liquet ex angulorum rectorum definitione

comprehenſos à perpendicularibus inte r ſe lineis binos angulos 2 & 3, rectoseſſe. Si verò obliquè cadat, quoniam tunc enati bini anguli 2 & 3, eandem quam cùm recti erant amplitudinem obtinent, nimirum arcum E*f*G, ut eſt oſtenſum in Inventionis fonte, idcirco duobus rectis ſemper æquantur. Quod erat primo loco oſtendendum.

ALITER.

Quocumque modo recta D O ſupra ſubjectam A B cadens ſteterit, oſtenſum eſt in inventionis fonte eundem arcum E*f*G pro binorum angulorum 2 & 3, ad coincidentię punctum O formatorum amplitudine ſemper manſurum, hoc eſt binos angulos, à recta D O in rectam A B perpendiculariter cadente, genitos æquari binis quibuscumque angulis, ab eadem recta D O, in eandem rectam A B obliquè incidente, profectis.

At recta D O in ſubjectam AB perpendiculariter cadens, binos ad coincidentiæ punctum O poſitos angulos à rectis ut pote lineis ſibi invicem perpendicularibus contentos, rectos facit.

Ergo eadem recta D O in eandem ſubjectam A B obliquè cadens, binos ad idem coincidentiæ punctum O poſitos angulos duobus rectis æquales efficiet.

DATUM II.

Iam coincidentes rectæ AB, HD, (vide ſuperiorem figuram) ſecent ſe invicem in puncto O.

QUÆSITUM.

Oportet oſtendere à coincidentibus A B, H D ſe invicem ſecantibus quatuor rectos, vel quatuor rectis æquales angulos 2, 3, 4, 5 ad ipſum ſectionis punctum O fieri, quorum bini quilibet contrapoſiti 2, 4, vel 3, 5 æquales ſunt inter ſe; omnes verò circa punctum O, vel quodlibet aliud exiſtentes quatuor rectis æquari.

DEMONSTRATIO.

Probatum eſt angulos 2, & 3 duobus rectis æquari; eademque ratione demonſtrabitur angulos 5, & 4 duobus

Digitized by Google

rectis etiam æquales eſſe (nimirum propter ſimilem rectæ HO in eandem rectam AB incidentiam.)Ergo quatuor anguli 2,3,4,5 ad ſectionis punctum O generati, quatuor angulis rectis æquantur.

Deinde quoniam anguli 2 & 3 oſtenſi ſunt æquales duobus rectis, idemque & per ſimilem demonſtrationem de angulis 3 & 4 concludi poſſit, ipſos nimirum duobus rectis æquari. Ergo duo anguli 2. & 3 duobus angulis 3, 4, æquantur, & detracto communi 3 reliquus 2 reliquo contrapoſito 4 æqualis erit, per communem animi notionem. Idem dicetur de duobus contrapoſitis 3 & 5 ut patet.

Poſtremò cùm probatum ſit angulos 2, 3, 4, 5, circa punctum O exiſtentes, quatuor rectis æquari, horumque angulorum amplitudo totam circumferentiam E*f*GE exhauriat, hoc eſt totum ambitum, qui circa punctum O exiſtit ; nullus ergo circa punctum O formari peterit angulus, quin ſit pars horum quatuor rectorum. Idem de quovis alio puncto factâ eâdem conſtructione demonſtrabitur, ut manifeſtum eſt. Quare cùm partes omnes ſimul ſumptæ toti ſuo adæquentur, neceſſe eſt angulos quotcumque, circa punctum O, vel quoduis aliud exiſtentes, quatuor rectis æquari. Quod erat oſtendendum.

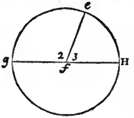
COROLLARIUM I.

Duorum rectorum angulorum amplitudo eſt ſemipheria circuli.

Hoc enim probatum eſt in prima parte demonſtrationis hujus elementi.

COROLLARIUM II.

Si ad aliquod rectæ lineæ punctum duæ rectæ ab oppoſitis partibus ductæ duos angulos efficiant duobus rectis æquales, ipſæ in continuum ſibi erunt, ſive unicam lineam efficient.



DATUM.

Eſto recta *ef*, ad cujus aliquod punctum *f* duæ rectæ *gf*, H*f*, ab oppoſitis partibus ductæ, angulos 2 & 3 duobus rectis æquales faciant.

QUÆSITUM.

Dico ambas lineas *gf*, & H*f* ſibi eſſe in directum, ſive g H unam eſſe lineam.

CONSTRUCTIO.

Centro *f*, intervallo quocumque *fg* deſcribatur circulus *fge*H, ſecans rectas *gf*, & H*f*, ſi opus eſt productas.

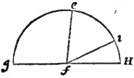
DEMONSTRATIO.

Anguli 2, & 3 duobus rectis æquantur ex hypotheſi; Igitur eorum arcus *ge*, & *e*H ſimul ſumpti, hoc eſt totus arcus *ge*H, medietas eſt peripheriæ deſcripti circuli *fge*H. Atqui eadem peripheria *ge*H *e* æquibiſecatur à producta ſemediametro *gf*, ex notione diametri; producta igitur ſemediameter *gf* ad punctum H pertinget, & ſic recta *f*H eadem erit linea, quàm quæ ex ſemidiametri productione naſcitur. Ideoque ductæ *gf*, H*f* integram diametrum conſtituunt, ſive in unam lineam ecolaſcunt, ut erat oſtendendum.

COROLLARIUM III.

Duæ rectæ lineæ nullam habent partem communem.

CONSTRUCTIO.



Poſſibile ſit *gf*H, & *gfi* duas rectas eſſe, quæ partem *gf* communem habeant.

Ductâ utcumque rectâ *ef* ad illud extremum communis ſegmenti, quod reliquas dictarum linearum partes attingit, centro *f* fiat circulus *fgei*H, ſecans *gf*H, & *gfi*, ſi opus eſt productas.

DEMONSTRATIO.

Cùm recta *ef*, cadat tam ſupra rectam *gf*H, quàm ſupra rectam *gfi*; igitur faciet cum unaquaque illarum duos ∠los, duobus rectis æquales, & conſequenter arcus g e I, menſurans amplitudinem ∠lorum à recta e f ſupra rectam *gfi* conſiſtente factorum, æquabitur arcui

geiH, menſuranti amplitudinem ∠lorum, ab eadem recta *ef*, ſupra rectam *g f H* conſiſtente, genitorum, hoc eſt, major arcus *g e i H* æquabitur arcui minori *g e i*, quod eſt abſurdum. Unde conſtat unicam ex propoſitis lineis *gfi*, & *gfH* ſibi eſſe in directum, ut hîc eſt *gfH*; reliquam verò, nimirum *gfi*, non unam conſtituere lineam, ſed ex duabus *gf*, & *fi*, indirectè jacentibus conflari. Ergo duæ rectæ commune ſegmentnm habere nequeunt, ut erat oſtendendum.

CONSECTARIUM I.

Duo plana ſe mutuo ſecantia nullam habent partem communem.

Nam ſi hoc verum eſſet tunc recta linea, in illa parte communi utcumque ducta, continuari poſſet, in duobus planis poſt interſectionem in diverſum abeuntibus, ut manifeſtum eſt, & ſic duæ rectæ lineæ aliquam partem communem haberent, contra præcedentem.

CONSECTARIUM II.

Hinc ſequitur, *Datis alicujus rectæ lineæ duobus ſolummodo punctis ipſam integram dari, ſive noſci, quemcumque ſitum habere poſſit.*

Nam propoſitæ rectæ lineæ, cujus duo puncta data ſunt, primò pars illa data eſt, quæ aſſignatis punctis interjicitur; quoniam inter duo puncta unica ſolum recta linea ductilis eſt, & quæ in infinitum produci poteſt, ut ad rectæ lineæ definitionem annotavimus; ex quo ſequitur reliquam etiam propoſitæ lineæ partem dari; quoniam per rectæ lineæ intra duo data puncta ductilis, & in infinitum producibilis veſtigium tranſire debet, ne duæ lineæ commune ſegmentum habere dicantur.

Idem & per eaſdem rationes de plano concludes, videlicet datis alicujus plani duabus ſolummodo lineis ipſum planum integrum dari, quemcumque ſitum habere poſſit.

Nam etiam inter duas rectas unicum planum ductile eſt, quod in infinitum produci poteſt, ut ad ejus definitionem annotavimus. Unde eadem quæ priùs de recta linea, abſurda ſequerentur, niſi verum eſſet quod proponitur.

CONSEC-

CONSECTARIUM III.

Itaque, *Si duæ rectæ, aut duo plana ſe mutuo ſecuerint in unico puncto, vel in unica linea ſe interſecabunt.*

Nam ſi duæ rectæ lineæ, aut duo plana in pluribus punctis, vel in pluribus lineis ſe interſecarent, aliquam partem communem haberent, quod mox probatis repugnat; aut certè duæ rectæ, vel duo plana inter duo interſectionis puncta, vel inter duas interſectionis lineas (quando ſunt duo plana ſe mutuo interſecantia) duci poſſent, quod etiam impoſſibile eſt, ex probatis ad definitionem rectæ lineæ, & plani.

CONSECTARIUM. IV.

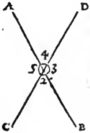
Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubjecto plano, pars verò in ſublimi. 1. p. 11.

Cùm enim pars in ſubjecto plano poſita in infinitum continuari poſſit in eodem ſubjecto plano, ſequeretur duas rectas commune ſegmentum habere poſſe. Quod eſt impoſſibile.

COROLLARIUM IV.

Si ad aliquod rectæ lineæ punctum duæ rectæ ab oppoſitis partibus venientes contra poſitos ad verticem angulos æquales inter ſe fecerint, hæ rectæ lineæ in directum ſibi erunt.

DATUM.



Eſto recta A B, ad cujus punctum O, ab oppoſitis partibus ductæ ſunt binæ rectę C O, D O, contrapoſitos ad verticem O angulos 2, & 4, vel 3, & 5 æquales inter ſe facientes.

QUÆSITUM.

Dico rectas C O, D O unicam lineam efficere, ſive ſibi eſſe in continuum.

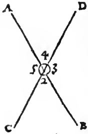
DEMONSTRATIO.

Ex hypotheſi $\angle^{lus}$ 2 Π $\angle^{lo}$ 4: & utrimque addito $\angle^{lo}$ 3 fiunt $\angle^{li}$ 2 + 3 Π ($\angle^{lis}$ 4 + 3 Π) duobus rectis (nimirum propter rectæ DO in rectam AB incidentiam). Ergo per antecedentem rectæ CO, & DO unam lineam efficiunt ſecundum propoſitionis intentum.

COROLLARIUM V.

Si quatuor rectæ lineæ ab eodem puncto exeuntes quatuor angulos fecerint, quorum bini oppoſiti æquales ſint, binæ adverſæ lineæ in continuum ſibi erunt, ſive unicam lineam efficient.

DATUM.



Jam ſint 4 lineæ OA, OD, OB, OC, exeuntes à puncto O, ubi 4^{or} angulos conſtituant, quorum oppoſiti 2, 4, æquales ſint, aliique 3, 5 pariter oppoſiti ſint etiam æquales.

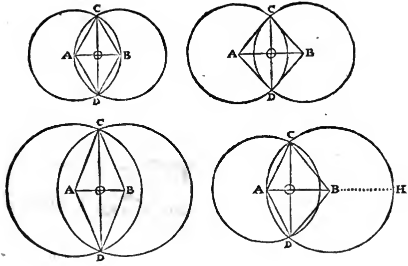
QUÆSITUM.

Dico AB, CD duas eſſe tantummodo lineas, hoc eſt duas AO, OB ſibi eſſe in continuum, & unicam efficere lineam, duas itidem CO, OD unicam.

DEMONSTRATIO.

Quoniam anguli 2 & 4 ponuntur æquales inter ſe; itemque anguli 3 & 5 invicem. Igitur anguli 2 & 3 æquantur angulis 4 & 5. Et conſequenter anguli 2 & 3 dimidium efficiunt $\angle^{lorum}$ ad punctum O poſitorum. Quia verò anguli ad punctum O conſtituti 4 rectis æquales ſunt, ut probatum eſt. Ideò anguli 2 & 3 duobus angulis rectis æquantur. Ergo lineæ CO, & DO unicam lineam efficiunt. Idem concludetur de lineis AO, & B O. Patet ergo propoſitum.

Digitized by Google



Hæc Figura ad multas Propoſitiones demonſtrandas neceſſaria, poni debet inter pag. 98. & 99. è regione Elementi ſecundi.

Digitized by Google

Digitized by Google

ELEMENTUM SECUNDUM.

De coincidentium linearum perpendicularitate.

FONS INVENTIONIS.

QUONIAM perpendiculi generatio docet duarum æqualium rectarum, ab extremis alicujus ſubjectæ prodeuntium, & in idem punctum ſupra cadentium concurſum in perpendiculo ad hujus ſubjectæ medium erecto ſemper inveniri; circuli verò natura talis eſt ut omnes ejus radij inter ſe coæquentur; intellectis ergo duobus circulis æqualibus, & interſecantibus ſe invicem, quorum centra rectâ lineâ connectantur, manifeſtum eſt rectas lineas, à ſingulis interſectionum punctis, ad circulorum centra, quæ connectentis extrema puncta ſunt, protenſas inter ſe coæquari; unde ſtatim ex generandi perpendiculi notitia concludetur dictarum interſectionum puncta in perpendiculo per medium nominatæ connectentis tranſeunte reperiri. Atque hinc formatur & confirmatur ſequens propoſitio.

ELEMENTARIS PROPOSITIO.

Si duo circuli ab extremis alicujus rectæ lineæ tanquam centris deſcripti ſe mutuo ſecent, æqualeſque ſint, interſectionum puncta in perpendiculo per medium dictæ lineæ tranſeunte poſita ſunt; ſi verò deſcripti circuli inæquales ſint, interſectionum puncta in aliquo quidem perpendiculo datam lineam ſecante poſita ſunt, ſed non in eo perpendiculo, quod per ejus medium tranſit.

DETERMINATIO CASUUM.

Peripheriæ circulorum ab extremis alicujus rectæ lineæ tanquam centris deſcriptorum, vel per extrema poſitæ lineæ tranſibunt, quod tunc accidet quando illorum radii poſitę lineæ æquabuntur, ut in 1ª figura; Vel poſitam lineam ſecabunt, quod tunc accidet quando illorum radii dictâ lineâ minores erunt, ut in 2ª figura; Vel tan-

Digitized by Google

dem extra poſitam lineam excurrent, quod tunc accidet quando illorum radij prædictâ lineâ majores erunt, ut in 3ª figura. In omnibus autem iſtis caſibus eadem eſt conſtructio, eademque demonſtratio.

DATUM I.

Dentur circuli ab extremis datæ A B deſcripti, & interſecantes ſe, quorum alii tranſeant per datæ rectæ extrema, A & B, & invicem æquantur ut in 1ª figura: Alii autem datam A B ſecent, & inter ſe ſint æquales ut in 2ª figura: Alii tandem inter ſe pariter æquales extra datam A B excurrant, ut in 3ª figura; & ſint interſectionum puncta C & D.

QUÆSITUM I.

Dico hæc interſectionum puncta C & D reperiri in perpendiculo, per medium ſubjectæ AB tranſeunte.

CONSTRUCTIO.

Ab extremis punctis datæ A & B*, ad interſectionum puncta C & D ducantur in omnibus figuris lineæ A C, B C, AD, BD, & CD.

DEMONSTRATIO.

In tribus primis figuris deſcripti bini circuli invicem æquantur (*ex hypotheſi*) Ergo in omnibus figuris binæ rectæ, ab extremis datæ lineæ, hoc eſt à deſcriptorum çqualium circulorum centris A & B, ad eorum circumferentias, ſive ad puncta C, & D ubi ſe interſecant, protenſæ invicem æquantur (*ex definitione circulorum æqualium*). Igitur in omnibus figuris puncta, ubi binæ æquales rectæ, ſupra datam rectam A B conveniunt, videlicet nominata circularium interſectionum puncta C & D in perpendiculo per medium datæ ſubjectæ A B trenſeunte poſita ſunt, ex notitia generationis perpendiculi ut volebat propoſitio.

DATUM II.

Dentur inæquales circuli ab extremis A & B, tanquam centris deſcripti, & interſeantes ſe in punctis C & D.

Digitized by Google

Quæsitum.

Dico hæc interſectionum puncta C & D reperiri in ſitu alicujus perpendiculi, rectam A B ſecantis quidem, ſed per illius medium non tranſeuntis.

Demonstratio.

Ambæ rectæ A C , A D (*vide ultimam fig.*) cùm ſint ejuſdem circuli radij invicem æquantur (*ex definitione circuli*) ſimiliter ambæ B C, B D cùm ſint etiam ejuſdem circuli radij inter ſe æquales ſunt (*per eandem definitionem*) & ab extremis C, & D ſupra rectam C D concurrunt in punctis A & B. Ergo concurſus puncta B & A in perpendiculo per medium ſubjectæ C D tranſeunte poſita ſunt ut ſupra. Quare recta A B perpendiculariter inſiſtit medio rectæ C D, vel potius perpendiculum eſt per medium baſis C D tranſiens (recta enim linea in eodem cum extremis ſitu ponitur ut ex ejus definitione apparet). Igitur etiam recta C D perpendiculariter inſiſtit rectæ A B; ſubjecta enim ut in perpendiculi difinitione oſtenſum eſt ad ſuum perpendiculum perpendicularis eſt. Jam verò quoniam minoris circuli radij A C & A D minores ſunt majoris ex hypotheſi circuli radiis D B & B C ; Ergo punctum A, ubi minores illi radii in perpendiculo A B per medium ſubjectæ C D tranſeunte conveniunt, minus diſtat ab ejuſdem ſubjectæ medio puncto O quàm punctum B, ubi majoris circuli radii C D & D B in dicto perpendiculo A B coincidunt. (*Ex probatis ad definitionem perpendicularis.*) Igitur recta BO minor eſt rectâ OB. Quapropter perpendiculum C D per punctum O tranſiens rectam A B in medio non ſecat, & conſequenter interſectionum puncta C & D in perpendiculo rectam A B ſecante quidem, ſed per ejus medium minimè tranſeunte poſita ſunt, ut erat oſtendendum.

Corollarium I.

Ex hujus propoſitionis demonſtratione generalis habetur methodus perpendiculum ad propoſitam rectam lineam erigendi.

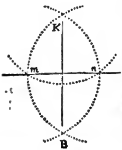
CASUS I.

Ut ſi ad datam in ſuperioribus figuris rectam lineam A B perpendiculum utcumque erigere oporteat. Deſcriptis ab illius extremitatibus tanquam centris, & ad quamcumque diſtantiam circulis vel æqualibus, vel inæqualibus dummodo ſe interſecent, connexiſque recta linea interſectionum punctis, hæc connectens recta perpendicularis erit ad poſitam A B.

CASUS II.

Si verò punctum in propoſita recta linea ſignetur, acceptis hinc inde duobus punctis ab aſſignato puncto æquidiſtantibus, (quæ quidem æquidiſtantia capietur deſcribendo circulum ab aſſignato puncto tanquam centro, & ad quamlibet diſtantiam) factiſque ab inventis punctis tanquam centris, & intervallo quocumque duobus circulis æqualibus, & interſecantibus ſe, (ut in primis tribus figuris factum vides) reliqua fiant ut priùs, & habebitur intentum, ut ex probatis apparet.

CASUS III.



At ſi datum punctum ſupra datam rectam extiterit. Ut ſi à puncto K ſupra datam rectam *m n* poſito perpendiculum in ſubjectam *m n* demittere oporteat.

Centro K deſcribatur arcus *m n* ſecans datam *m n* in punctis *m*, *n*. Deinde centris *m* & *n* & ad quamlibet diſtantiam, deſcribantur æquales circuli interſecantes ſe, vel in dato puncto K, vel ſupra ipſum, vel infra, nihil enim refert, dummodo interſecantes circuli invicem æquentur. Ultimo connexis rectâ lineâ interſectionum punctis B & K, probabitur, ut jam factum eſt, connexam B K perpendiculariter inſiſtere rectæ *m n*, ſecundum propoſitionis intentum.

CONSECTARIUM.

Iam facile eſt nobis cum Galilæo geometricè demonſtrare tres ſolùm reperiri magnitudinum ſpecies, nempe longitudinem, latitudinem & profunditatem, ſive altitudinem, hoc eſt à tertia dimenſione ad quartam tranſitum non dari.

DEMONSTRATIO.

Recta ſola, non verò curva (ut ad rectæ lineæ definitionem annotavimus) punctorum diſtantias determinat; tum quia recta eſt omnium breviſſima; tum quia unica, & ſola determinata eſt; cùm aliæ ſint infinitæ, inæquales, & longiores: determinatio verò ex eo fieri debeat quod eſt unum, atque certum. Sic ergo rectam lineam habemus pro determinatrice longitudinis inter duos terminos.

Jam ſi rectæ cuipiam lineæ, pro longitudine poſitæ, parallelam rectam ducamus, & ex puncto in recta linea, quæ longitudinem deſignat, aſſumpto, interjectæ inter dictas lineas ſuperficiei latitudinem metiri velimus, ducenda erit recta linea, quæ ad poſitam pro longitudine lineam perpendiculariter inſiſtat, hæc enim breviſſima eſt, & unica ex infinitis majoribus, & inter ſe inæqualibus, quæ ad alia, atque alia oppoſitæ lineæ puncta duci poſſunt. Hactenus igitur habemus quod prima dimenſio, ſive longitudo determinetur rectâ lineâ: Secunda verò, hoc eſt latitudo, aliâ, non ſolùm rectâ, verùm etiam perpendiculariter inſiſtente alteri, longitudinem determinanti.

Quod ſi ab eodem fixo termino, ſubjecti plani, inter duas jam ductas lineas contenti diſtantia ab alio quodam parallelo plano, in ſublimi poſito capienda ſit, ex illo ſublimi plano ducenda erit utique recta linea ab ſubjectum planum perpendicularis, cùm ipſa ſit breviſſima omnium, quotquot ex eodem ſublimis plani puncto ad ſubjectum planum duci poſſunt.

Quod ſi ergo punctum aliquod ſtatuas caput, ac ter-

minum dimenſionum, ex eoque ducas rectam lineam, primæ dimenſionis, hoc eſt longitudinis determinatricem; neceſſariò altera linea latitudinem definitura primæ illi perpendiculariter, ſive ad angulos rectos inſiſtet; & illa denotatrix altitudinis, ſeu tertiæ dimenſionis, ex eodem progreſſa puncto duabus reliquis etiam perpendiculariter, ſive ad angulos rectos inſiſtet. Atque ita à tribus rectis perpendicularibus, tamquam à tribus lineis, unis, & certis, & breviſſimis determinatas habemus tres dimenſiones, nimirum longitudinem, latitudinem, & profunditatem.

Et quia perſpicuum eſt quod in eodem aſſignato puncto non poſſit alia recta concurrere à tribus jam ductis diverſa (poſſunt enim ab oppoſitis partibus aliæ rectæ his advenire, ſed cùm rectà concurrere deberent, ideò primarum tantùm productiones forent) quæ ipſis perpendiculariter inſiſtat; cumque dimenſiones à ſolis rectis lineis, ſibi invicem perpendicularibus, determinari debeant, ex eo ſequitur dimenſiones, ſive magnitudinum ſpecies; quæ ſic appellantur, tribus plures non eſſe, ut erat oſtendendum.

COROLLARIUM II.

Sequitur adhuc ex hujus propoſitionis demonſtratione rectam AB, in primis tribus figuris, æquibiſecari à recta CD, nam oſtenſum eſt rectam CD perpendiculum eſſe per medium ſubjectæ AB tranſiens.

COROLLARIUM III.

Conſtat etiam ex hujus propoſitionis demonſtratione angulum CBD in prima & ultima figuris, & arcum CAD æquibiſecari in A, per rectam AB.

Nam probatum eſt rectam AC æquari rectæ AD. Atque cùm çquales hæ rectæ ſubtendant ejuſdem circuli arcûs AC, AD. Igitur dicti arcus AC, AD ab æqualibus rectis ſubtenſi, inter ſe propterea æquales ſunt (*ex probatis ad definitionem circuli*). Et conſequenter angulus ABC æquabitur angulo ABD. Quapropter angulus CBD & arcus CAD bifariam diviſus eſt ſecundùm propoſitionis intentum.

Atque

Atque ex his duobus corollariis generalis methodus elicitur datam rectam lineam; vel angulum rectilineum, vel circuli datum arcum æquibiſecandi.

PARS I.

Ut ſi recta A B. (*vide tres primas figuras*) æquibiſecanda proponatur. Deſcriptis ab illius extremitatibus A & B quibuſlibet circulis æqualibus, dummodo ſe interſecent, connexiſque rectâ lineâ interſectionum punctis, hæc connectens recta propoſitam A B æquibiſecabit, ut patet ex probatis.

PARS II.

Vel ſi (*ut in prima & ultima figuris*) detur angulus C B D æquibiſecandus. Centro B, ad quamlibet diſtantiam B C fiat arcus C A D, ſecans alterum latus B D, ſi opus eſt productum, ductâque C D demittatur à vertice B, in ductam C D, perpendiculum (ex proximè tradita methodo) ſecans deſcriptum arcum in A, & erit ∠lus C B D bifariam diviſus per rectam B A, ut patet ex hoc tertio corollario.

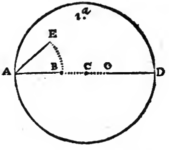
PARS III.

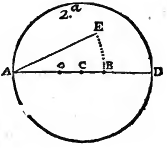
Vel ſi (*in eiſdem figuris*) detur arcus C A D bifariam dividendus. Ductâ C D rectâ lineâ, æquibiſectâque per perpendiculum B A, datum arcum attingens in A. Probabitur, ut jam factum eſt, ad definitionem perpendicularis omnes rectas, ab extremis rectæ C D, ad aliquod perpendiculi in ejus medio erecti punctum protenſas invicem æquales eſſe. Igitur rectæ A C, A D, & conſequenter ab eis ſubtenſi arcus A C, A D inter ſe æquantur, ut erat oſtendendum.

APPENDIX.

Ex inventione puncti in recta linea medij, & ex ciruli natura methodus elicitur rectam lineam datæ rectæ æqualem ad quodlibet datum punctum apponendi.

Digitized by Google





Determinatio casuum.

Datum punctum vel extra datæ lineæ poſitionem exiſtet, vel in ipſius veſtigio ſitum erit, vel certè in ipſamet reperietur, & tunc vel erit unum extremorum datæ lineæ, vel inter utrumque jacebit extremum.

Constructio, et demonstratio in 1° casu.

Si datum punctum fuerit unum extremorum datæ rectæ lineæ, tunc à dato illo puncto tanquam centro, & intervallo datæ rectæ fiat circulus, à cujus centro, hoc eſt à dato puncto ad peripheriam ducatur quælibet recta, & erit abſolutum negotium; nam tunc illa, & quæcumque alia ſic ducta datę rectæ æquabitur, & quæſtioni ſatisfaciet, ſicut evidens eſt ex definitione circuli.

Secundus Casus.

Jam detur recta A B, & punctum O vel in ipſius veſtigio ſitum, ut in prima figura, vel inter utrumque jacens extremum, ut in ſecunda figura.

Quæsitum.

Oportet ad punctum O rectam lineam O D ponere, quæ datæ A B ſit æqualis.

CONSTRUCTIO.

Datâ AB indefinitè productâ æquibiſecetur ſegmentum BO in puncto C, à quo ut centro, radio verò AC deſcribatur circulus, ſecans AB productam in puncto D.

FACTUM I.

Dico rectam OD æquari datæ AB.

DEMONSTRATIO.

Radii AC, CD invicem æquantur ex definitione circuli, necnon per fabricam rectæ OC, CB; Ergo ab æqualibus AC, CB demptis æqualibus OC, CB, reſiduæ AB, OD in prima figura æquantur inter ſe; vel æqualibus AC, CD adjectis æqualibus OC, CB totales AB, OD in ſecunda figura æquales erunt inter ſe. Quod erat oſtendendum.

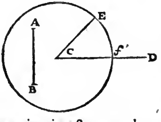
III. CASUS.

Poſtremò detur recta A E extra cujus veſtigium aſſignetur punctum O ut in duabus aſcriptis figuris. Jungantur puncta A & O rectâ lineâ AO indefinitè productâ in qua menſuretur AB æqualis datæ AE, & reliqua fiant ut priùs, eritque OD æqualis AB ſive AE.

CONSECTARIUM.

Hinc modus habetur ex datis duabus rectis inæqualibus à majore lineam minori æqualem abſcindendi.

DEMONSTRATIO IN I°. CASU.



Si propoſitæ rectæ in idem punctum coincidant; tunc à puncto coincidentiæ tanquam centro, & datæ minoris rectæ intervallo deſcriptus circulus ex majore linea radium abſcindet datæ minori rectæ æqualem, ut evidens eſt ex natura circuli.

CASUS II.

Si verò propoſitæ lineæ inter ſe diſtent, tunc ad unum datę majoris lineæ finem recta quędam linea datæ minori æqualis, juxta præcedentem doctrinam, apponatur, & ab accepto majoris lineę fine, tanquam centro, radio verò appoſitam lineam, id eſt datam minorem ęquante deſcriptus circulus, ex majore linea radium abſcindet, ut priùs, appoſitæ lineę, ſive datę minori ęqualem, ut erat faciendum.

CONSECTARIUM II.

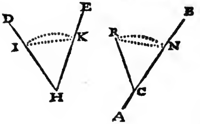
Ex eadem methodo, rectam nempe lineam datæ rectæ æqualem ad quodlibet punctum apponendi, praxis enata eſt per quam exiſtente poſſibili inſcriptione data quæcumque recta linea in dato circulo inſcribitur.

CONSTRUCTIO, ET DEMONSTRATIO.

Ab accepto quolibet in dati circuli peripheria puncto tanquam centro, intervallo verò datam rectam ęquante deſcriptus circulus dati circuli peripheriam attinget, aut ſecabit in aliquo puncto: (nam ſi neutrum faciat, manifeſtum eſt datam rectam in dato circulo inſcribi non poſſe.) Jam ſi ab accepto puncto ad contactus vel ſectionis terminum recta ducatur, ipſa erit inſcripta quam quęrimus, nam utrimque circuli continget ambitum, & datę rectę ęqualis erit per conſtructionem.

CONSECTARIUM III.

Ad ſignatum in data recta linea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum ponere.



DATUM.

Detur recta AB & in ea punctum C. Detur etiam angulus rectilineus DHE.

QUÆSITUM.

Oportet ad datam rectam AB, & ad datum in ea punctum C angulum ponere, qui dato angulo rectilineo DHE ſit æqualis.

CONSTRUCTIO.

Centro H, intervallo quocumque H I, in alterutro latere D H accepto fiat arcus I K, ſecans alterum latus H E in puncto K. Deinde à dato puncto C tanquam centro; ſpatio verò C N ęquali rectę H K, vel H I deſcribatur indefinitus arcus N R. Tum ducatur ſubtendens I K, cui ęqualis N R inſcribatur in arcu N R. Tum ducatur C R.

FACTUM.

Dico angulum R C N ęquari dato angulo D H E.

DEMONSTRATIO.

Centris H, C, & ſpatiis æqualibus H I, C N deſcripti ſunt ęqualium circulorum arcus I K & N R, & factus eſt arcus R N arcui I K ęqualis, eo quod ſubtenſę I K, R N ęquantur inter ſe (ex conſtructione & circuli definitione), Ergo factus angulus R C N ęquatur angulo dato D H E, ut volebat propoſitio.

CONSECTARIUM IV.

Ex tribus datis rectis lineis, quæ tribus datis æquales ſint, triangulum conſtruere.

DETERMINATIO DATI.

Oportet autem duas quocumque modo ſumptas reliquâ majores eſſe, ex annotatis ad definitionem rectę lineæ.

CONSTRUCTIO, ET DEMONSTRATIO.

Poſitâ per antecedentem doctrinam quâpiam rectâ lineâ, uni è datis rectis lineis æquali, ab ambobus talis poſitę extremis, tanquam centris fiant duo circuli, quorum radii datis duabus reliquis rectis lineis ſigillatim æquentur (atque hi duo circuli ſe mutuo ſecabunt propter appoſitam dati determinationem). Jam ſi à deſcriptorum circulorum centris, ſive à poſitæ linee extremis, ad punctum ubi circuli ſe interſecant duo radii ducantur, exſurget triangulum, ſub his radiis, & ſub poſita

O iij

Digitized by Google

linea, hoc eſt per fabricam, & circuli definitionem, ſub tribus lateribus, datis tribus rectis lineis ſigillatim æqualibus comprehenſum, ut erat faciendum.

COROLLARIUM IV.

Ampliùs manifeſtum eſt ex hujus elementaris propoſitionis demonſtratione ſemidiametrum A B (in prima figura) æquibiſecare rectam C D, arcum C A D ſubtendentem, vel in dicti arcus circulo inſcriptam, eique perpendiculariter inſiſtere. Hoc enim jam probatum eſt quamvis aliter enunciatum.

FONS INVENTIONIS.

Quoniam verò patet idem demonſtrari poſſe de quacumque alia ſubtendente, vel inſcripta per centrum circuli non tranſeunte, videlicet illam æquibiſecari à talis circuli radio, vel à diametro (ſi radius uſque ad peripheriam producatur) in illa perpendiculariter inſiſtente.

Hinc formatur, & confirmatur ſequens propoſitio:

Si diameter circuli perpendiculariter ſecet aliquam rectam in ipſo circulo inſcriptam, vel ipſius circuli arcum ſubtendentem, illam æquibiſecabit, & ſi æquibiſecet eidem perpendiculariter inſiſtet.

DATUM.

In ultima figura diameter A H vel ſemidiameter AB (nihil enim intereſt) perpendiculariter ſecet aliquam rectam C D, arcum C A D ſubtendentem.

QUÆSITUM.

Dico rectam C D bifariam ſecari à ſemidiametro AB.

CONSTRUCTIO.

Centro B ad extrema ſubtendentis C & D agantur, ut priùs, rectæ B C, B D.

DEMONSTRATIO.

Punctum B reperitur in ſitu perpendiculi, per medium ſubjectæ C D tranſeuntis, & plura perpendicula

ab eodem puncto ad eandem lineam duci nequeunt, (*ut oſtenſum eſt ad definitionem perpendiculi*). Ideò recta A B ad rectam C D perpendicularis (*ex hypotheſi*) per medium ſubjectæ C D tranſibit. Igitur illam æquibiſecabit.

2°, Quoniam recta C D æquibiſecari ponitur à recta B A, ideò punctum O ubi nominata C D attingitur à radio A B, in medio ejuſdem rectæ C D conſiſtit; ſed punctum B etiam in medio rectæ C D reperitur: tota ergo B A in medio ſubjectæ C D poſita eſt, & conſequenter ipſi perpendiculariter inſiſtit, ex probatis ad definitionem perpendiculi.

CONSECTARIUM I.

Si in circulo duæ rectæ non per centrum extenſæ ſe ſe mutuo ſecent, ſe ſe inæquibiſecabunt.

DEMONSTRATIO.

Si enim ſe æquibiſecarent ſequeretur actam à talis circuli centro ad earum interſectionis punctum lineam utrique earum medietati perpendiculariter inſiſtere. Unde concluderetur partialem angulum ſuo totali angulo coæquari, quod eſt impoſſibile. Quum ergo ſecantes ſe in circulo lineæ non per centrum extenſæ æquibiſecari ſe invicem nequeant ob allatas rationes, ſupereſt ut ſe ſe inæquibiſecent ſecundum propoſitionis intentum.

CONSECTARIUM II.

Si in circulo perpendicularis quædam recta rectam aliam, circuli arcum ſubtendentem æquibiſecet, in illa æquibiſecante circuli centrum poſitum eſt.

DEMONSTRATIO.

Quocumque loco circuli centrum exiſtat definitio circuli nos admonet ductas ab ejus centro ad alicujus ſubtendentis extrema, hoc eſt ad ambitum circuli, rectas lineas inter ſe æquales fore. Igitur circuli centrum quocumque loco ſitum in aliquo perpendiculo per alicujus

ſubtendentis medium tranſeunte ſemper exiſtit. Atqui unicum perpendiculum per cujuſlibet ſubtendentis medium tranſiens, ſive ſubtendentem æquibiſecans duci poteſt, ut ad perpendiculi definitionem demonſtratum eſt; in ducta igitur recta linea quamlibet ſubtendentem æquibiſecante circuli centrum poſitum eſt, ut erat oſtendendum.

CONSECTARIUM III.

Atque hinc deducitur methodus circuli centrum inveniendi.

CONSTRUCTIO, ET DEMONSTRATIO.

Aſſumpto enim propoſiti circuli quolibet arcu, ductâque ipſius ſubtenſâ, æquibiſecetur illa ſubtenſa per aliquam perpendicularem, eò uſque productam, donec utrimque circuli contingat ambitum. Jam in illa æquibiſecante circuli centrum poſitum eſſe neceſſariò demonſtratur ex antecedentibus; nec alibi quàm in ejus medio ſitum eſſe oſtenditur ex definitione circuli; æquibiſectâ itaque illa perpendiculari habetur intentum, nam æquibiſectionis punctum centrum eſt quod quæritur.

Vel aſſumpto adhuc alio quovis arcu, ductâque ipſius ſubtenſâ, æquibiſecetur illa, ut ſuprà, per aliquam perpendicularem, in qua circuli centrum poſitum eſſe ſimiliter oſtendetur. Duæ igitur perpendiculares in circuli centro ſibi invicem occurrunt, & cùm in unico puncto linearum fiat occurſus. Igitur punctum interſectionis illarum erit neceſſariò quæſitum circuli centrum.

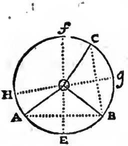
APPENDIX.

Ex ultima hujus demonſtrationis parte manifeſta fit ſequens propoſitio.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod à quo ad peripheriam cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales, acceptum punctum centrum eſt ipſius circuli.

DATUM.

DATUM.



Ab aſſumpto puncto O in propoſito circulo cadant ad peripheriam plures quàm duæ rectæ æquales O A, O B, O C.

QUÆSITUM.

Dico punctum O centrum eſſe propoſiti circuli.

CONSTRUCTIO.

Ducantur rectæ A B, & B C, in quas demittantur perpendicula O*g* & O E producta uſque ad H, & *f*.

DEMONSTRATIO.

Perpendicula H *g* & *f*E per ſubtenſarum A B, B C media tranſeunt, ob poſitam ſupraſtantium linearum O A, O B, nec non OB, OC æqualitatem: & in puncto O ſe interſecant, propter conſtructionem; Ergo in interſectionis puncto O propoſiti circuli centrum poſitum eſt, ex probatis, id eſt punctum O propoſiti circuli centrum eſt. Quod erat oſtendendum.

Atque hinc *Methodus habetur per data tria puncta non in directum poſita circulum ducendi.*

Et *Dato circuli arcu ipſum circulum deſcribendi, cujus arcus eſt:*

Ut ſi datis in præcedenti figura tribus punctis A, B, C, non in directum poſitis; vel dato arcu A B C, circulum deſcribere oporteat, per data tria puncta A, B, C, tranſeuntem, vel in cujus circumferentia datus arcus reperiatur. Sumptis in arcu A B C tribus punctis A, B, C, ducantur rectæ, A B, & B C, ac reliqua fiant ut priùs, & habebitur intentum.

P.

Digitized by Google

CONSECTARIUM.

Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non ſecat.

Sumpto enim cujuſvis interſecantium ſe invicem circulorum centro; ductiſque ab illo ad tria (ſi tot, vel plura eſſe dicantur) interſectionum puncta rectis lineis, ſequeretur inventum unius circuli centrum, etiam alterius circuli centrum eſſe; quoniam ab illo puncto plures quàm duæ rectæ æquales ad ejus peripheriam, ſive ad interſectionum puncta caderent, & ſic ambo circuli omni ex parte congruentes, ſe ſe propterea non ſecarent, contra hypotheſim.

FONS INVENTIONIS.

Quoniam verò $\triangle^{li}$ Æquilateri, vel Iſoſcelis latera invicem æqualia ſunt (*ex eorum definitione*) ſi igitur à verticibus talium $\triangle^{lorum}$ tanquam centris, ſpatio verò unius æqualium laterum deſcribatur circulus, neceſſariò tranſibit per extremum alterius æqualis lateris. Unde baſis fiet ſubtenſa alicujus arcus, in deſcripti circuli peripheria exiſtentis: demiſſum verò à vertice ad baſim perpendiculum, & ad circumferentiam deſcripti circuli productum, erit ſemidiameter dicti circuli. Unde talis oritur propoſitio.

In triangulo Æquilatero, vel Iſoſcele perpendiculum, ab angulo duobus æqualibus lateribus comprehenſo, in baſim demiſſum, illam, & dictum angulum æquibiſecat, & contra.

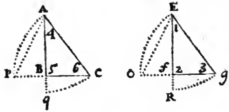
Hoc enim idem eſt, quod prius oſtenſum fuit, licet aliter enuncietur.

Ex hoc etiam corollario quarto confirmatur ſequens propoſitio.

Triangula rectangula, quorum ſingula latera ſingulis lateribus æquantur, æquiangula ſunt, & æqualia.

Digitized by Google

Datum.



Proponantur triangula rectan-gula A B C, & E*fg*, quorum ſingula latera ſingulis lateribus æqualia ſint, videlicet B C ipſi *fg*. Ac ipſi E*g*, atque A B ipſi E*f*.

Quæsitum.

Demonſtrandum 1° eſt Δ^{la} A B C, & E*fg* inter ſe æquiangula eſſe, videlicet $\angle^{um}$ 1 Π $\angle^{lo}$ 4. & $\angle^{lum}$ 3 Π $\angle^{lo}$ 6. Rectos autem $\angle^{los}$ 2 & 5 inter ſe æquales eſſe, manifeſtum eſt ex illorum definitione.

Constructio.

Centris C & *g*, radiis verò C A, ac *g* E fiant arcus A P, E O, ſecantes latera C B, *gf*, producta in P, & in O, ducanturque ſubtenſæ A P, E O.

Demonstratio.

Latus A C, ſive P C ponitur æquale lateri E *g*, ſive O *g*, & pars B C, parti *fg*. Ergo reliquum B P æquatur reliquo O *f*. Sed $\perp^{lum}$ A B ponitur etiam æquale $\perp^{lo}$ E *f*. Igitur rectæ A P, & E O, connectentes $\perp^{la}$ A B, B P, atque E *f*, *f* O, ſingula ſingulis æqualia, inter ſe propterea æquales ſunt.

Quoniam verò eædem connexæ A P, E O circulorum, (propter poſitam radiorum C A, & *g* E æqualitatem) æqualium; Ideò arcus A P, & E O æquales ſunt. Ergo ab his arcubus menſurati anguli 3 & 6 invicem æquantur. Idem, & per eandem conſtructionem oſtendetur de $\angle^{lis}$ 4 & 1, eos videlicet inter ſe æquari, ut patet. Ergo cum $\urcorner^{li}$ 5 & 2 etiam æquales ſint, ut pote recti, propoſita Δ^{la} A B C & E*fg* æquiangula ſunt.

Digitized by Google

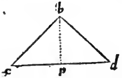
Demonstratio secundæ partis.

Si propoſita $\triangle^{la}$ A B C & E*fg* inter ſe æqualia non ſunt, procul dubiò ſuper uno alterutrius $\triangle^{li}$, putà poſterioris E*fg* latere *fg* conſtitui poterit aliud $\triangle^{lum}$ priori A B C æquale, æquilaterum, & æquiangulum, quod idem ſpatium non claudet quàm $\triangle^{lum}$ E*fg*, baſi *fg* ſuperimpoſitum; quoniam propoſita $\triangle^{la}$ inæqualia dicuntur. Quod eſt impoſſibile, nam quum à puncto *f* ad baſim *fg* unicum $\perp^{lum}$ duci poſſit, ideò deſcribendi $\triangle^{li}$ $\perp^{lum}$, quod æquale eſſe debet $\perp^{lo}$ A B, id eſt $\perp^{lo}$ E*f*, idem omninò erit cum ipſo $\perp^{lo}$ E*f*. Quare & reliquum ejus latus idem cum latere E *g*, ob naturam rectæ lineæ. Ergo propoſita $\triangle^{la}$, eò quod inter ſe æquilatera ſunt, & æquiangula, ut oſtenſum eſt, etiam æqualia fieri neceſſe eſt.

Consectarium I.

Hinc ſequitur Iſoſcelium triangulorum angulos, ad baſim exiſtentes, inter ſe æquari.

Datum.



Proponatur $\triangle^{lum}$ Iſoſceles *bcd*.

Quæsitum.

Dico $\angle^{los}$ *bdc*, *bcd* ad baſim *cd* exiſtentes inter ſe æquari.

Constructio.

A puncto *b*, in baſim *dc* demittatur $\perp^{um}$ *bp*.

Demonstratio.

Æquilateriſmus eſt inter orta per fabricam duo $\triangle^{la}$ rectangula *bdp*, & *bcp* (nam latus *bd* æquatur lateri *bc*, propter poſitum in his lateribus Iſoſceliſmum, & latus *dp* lateri *cp* propter factam in baſi *dc* à $\perp^{lo}$ *bp* æquibiſectionem ad punctum *p*, ſicut oſtenſum eſt in hac elementari propoſitione, latus autem *bp* commune eſt.) Ergo æquiangula ſunt inter ſe per antè probata, & conſequenter correſpondentes anguli *bdp*, & *bcd* æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

Consectarium II.

Hinc etiam ſequitur Triangula quæcumque inter ſe æquilatera, & inter ſe æquiangula eſſe, & æqualia.

Demonstratio.

Nam ex probatis ad definitionem perpendiculi demonſtrabitur unumquodque propoſitorum Δ^lorum, demiſſis in eorum baſes ⊥^lis, dividi in duo Δ^la rectangula inter ſe æquilatera, atque ex mox probatis æquiangula, & æqualia. Sed horum partialium Δ^lorum iidem omninò ſunt anguli quàm propoſitorum, ut manifeſtum eſt. Propoſita ergo Δ^la inter ſe æquiangula ſunt, & æqualia, ut erat oſtendendum.

Corollarium V.

Apparet etiam ex hujus elementaris propoſitionis constructione triangula A B C, *&* A D B, *in 1ª figura exiſtentia eſſe æquilatera; reliqua verò in cæteris præter ultimam figuris, & iiſdem notata literis, eſſe iſoſcelia.*

Nam quoniam circuli primæ figuræ inter ſe æquantur, ex hypotheſi; ideò tres rectæ A B, A C, C B, ab ipſorum centris ad peripherias extenſæ æquales ſunt. Ergo Δ^lum ABC eſt ęquilaterum. Idem quoque dicetur de Δ^lo A D B.

In 2ª verò, & 3ª figuris oſtenſum eſt rectas A C, & B C inter ſe æquari, nec non rectas A D, B D inter ſe, (*per circuli definitionem.*) Quare cùm ex hypotheſi quælibet harum rectarum minor ſit datâ baſi A B, ut in 2ª figura, vel eâdem baſi A B major exiſtat, ut in 3ª figura; Ideò Δ^la A B C, & A B D Iſoſcelia ſunt.

Consectarium.

Atque hinc deducitur *Methodus generalis Triangulum Æquilaterum vel Iſoſceles deſcribendi.* Cujus praxis ex ſola figurarum inſpectione fit manifeſta.

Alio etiam modo triangulum Iſoſceles deſcribi poteſt.

Ut conſtituto ſuper data quavis recta linea Δ^lo æquilatero, & ab uno ex ejus ∠^lis ductâ, & in infinitum pro-

Digitized by Google

ductâ perpendiculari, ejus baſim æquibiſecante; ſi ad hujus perpendicularis aliqua puncta tam ſupra, quàm infra verticem ſumpta ab extremis baſeos rectæ lineæ ducantur, generabuntur hac ratione $\triangle^{la}$ Iſoſcelia varii generis, ut ex annotatis ad definitionem perpendicularis apparet.

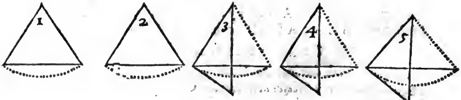
Si verò ſcalenum $\triangle^{lum}$ ſupra datam quamlibet rectam conſtruere libeat.

Deſcripto ab una datæ rectæ extremitate circulo, & intervallo datam lineam ſuperante, factoque ab altera datæ rectæ extremitate circulo, priorem ſecante intervallo verò datâ lineâ minore, ſi à dictis exremis ad interſectionis punctum ducantur duæ rectæ, orietur hac ratione ſcalenum $\triangle^{lum}$, ut manifeſtum fit ex definitione circuli.

COROLLARIUM VI.

Ex natura 1^{li}, & explicata methodo $\angle^{um}$ rectilineum dato angulo rectilineo æqualem ad quodvis punctum apponendi, talis efficitur & confirmatur propoſitio.

In omnibus triangulis, quibus duo latera, ſigillatim ſumpta, æqualia ſunt, baſes baſibus æquantur, quando anguli, ab his lateribus ſigillatim æqualibus comprehenſi, inter ſe ſunt æquales: quando verò tales anguli inæquales exiſtunt, baſes etiam inæquales ſunt; & major quidem ea, quæ majorem angulum ſuſtinet, minor verò, quæ minori angulo ſubtenditur.



PRIMA PARS.

CONSTRUCTIO ET DEMONSTRATIO IN I° CASU.

Si propoſita $\triangle^{la}$ Iſoſcelia ſint, ut in 1^{a}, & 2^{a}, figuris

nihil erit difficultatis. Factis namque ab angulorum, æqualibus lateribus comprehenſorum, verticibus, quaſi centris, & laterum æqualium intervallo, circulis, arcus inter eorum latera comprehenſi æquales erunt, propter poſitam tum laterum, tum angulorum ab his comprehenſorum æqualitatem. Unde horum arcuum æqualium ſubtenſæ, quæ dictorum △lorum baſes ſunt, inter ſe æquantur (*ex probatis ad definitionem circuli*).

PRIMA PARS.

CONSTRUCTIO, ET DEMONSTRATIO IN 2°, CASU.

Jam ſi in propoſitis △lis unum ex lateribus altero majus ſit, ut in 3ª, & 4ª figuris. Ab altera parte majorum laterum, & ad ipſa majora latera, in punctis æqualium angulorum, à dictis lateribus comprehenſorum, fiant anguli nominatis angulis æquales. Jam uterque auctus angulus æqualis erit; cùm uterque ſit duplus angulorum ex hypotheſi æqualium. Si igitur ab horum æqualium angulorum verticibus quaſi centris, intervallo verò minorum laterum, ex hypotheſi æqualium, arcus inter ipſorum latera interceptos deſcribas, erunt hi arcus æquales inter ſe. Quamobrem & horum arcuum ſubtenſæ invicem æquabuntur. Sed has ſubtenſas æquibiſecat majus propoſitorum △lorum latus, propter poſitam ∠lorum ex utraque talis lateris parte exiſtentium æqualitatem; erit ergo tale latus ad ipſas ſubtenſas perpendiculare. Quoniam autem ſubtenſæ inter ſe æquantur, ut probatum eſt, & ab ipſarum extremitatibus, ad ⊥um, in earum medio erectum, ductæ rectæ lineæ, hoc eſt, deſcriptorum arcuum radii inter ſe æquales ſunt. Igitur perpendicula, à punctis in quo radii concurrunt, in ſubtenſas demiſſa inter ſe æquantur. Sed illa perpendicula partes ſunt majorum laterum, per hypotheſim æqualium; ablatis ergo ab his, nominatis partibus æqualibus reſidua majorum æqualium laterum invicem æquabuntur. Atqui reſiduæ illæ lineæ æquales perpendicula habent æqualia, medietates nempe dictarum ſubtenſarum. Ergo rectæ lineæ, ab extremis talium ⊥lorum ad extrema reſiduarum ex majo-

ri latere linearum, extenſæ, quæ dictorum $\triangle^{lorum}$ baſes ſunt, inter ſe æquantur. Quod erat primo loco oſtendendum.

II. Pars.

In duabus ultimis figuris ſi angulus in 5^a major ſit eo angulo, qui à lateribus ſigillatim æqualibus in 4^a figura comprehenditur; quoniam ſubtenſa 5e figuræ major eſt ſubtensâ 4e, propter poſitam dictorum angulorum inæqualitatem, & rectę, ab harum ſubtenſarum extremis ad $\perp^{la}$, in earum medio poſita, ductæ æquales ſunt ex hypotheſi; ideò $\perp^{lum}$, quod à concurſu duarum rectarum ſupra majorem ſubtenſam exiſtentium in illam majorem demittitur, ut in 5^a figura accidit, minus eſt $\perp^{lo}$, quod à concurſu duorum radiorum ſupra minorem ſubtenſam exiſtentium in illam minorem cadit, ut in 4ª figura: & quia inæqualia illa $\perp^{la}$ partes ſunt majorum in dictis $\triangle^{lis}$ laterum, per hypotheſim æqualium; ablato ergo minori $\perp^{lo}$ à majore latere in 5^a fig. reſidua linea major erit eâ, quæ poſt ablatum ab æquali latere majus $\perp^{lum}$ in 4^a fig. ſupereſt.

Ultimò quoniam reſidua linea quintæ figuræ major eſt reſiduâ lineâ quartę, & $\perp^{lum}$ ſeu ſubtenſæ medietas in 5^a figura majus eſt $\perp^{lo}$, hoc eſt ſubtenſę medietate, in 4^a; Igitur in 5^a fig. recta linea majorem reſiduam cum majore $\perp^{lo}$ connectens, & quæ propoſiti in 5^a fig. $\triangle^{li}$ baſis eſt, major erit rectâ lineâ minorem quartę fig. reſiduam lineam cum minore $\perp^{lo}$ nectente, hoc eſt baſe $\triangle^{li}$ in 4^a fig. propoſiti. Quod erat 2° loco probandum.

Appendix.

Quoniam in 1^a parte hujus probatum eſt $\triangle^{la}$, quibus duo latera ſigillatim ſumpta, & anguli, ab his lateribus comprehenſi, invicem æquantur, baſes habere ęquales; igitur hujuſmodi $\triangle^{la}$ inter ſe ęquilatera ſunt; ergo etiam ęqualia, & ęquiangula per antè probata.

Corollarium VII.

Ex $\perp^{li}$ natura manifeſtum eſt (*vide 4^{am} figuram propoſitionis*

Digitized by Google

poſitionis elementaris) punctum O, in quo perpendiculum BO ſubtenſam CD contingit, intra circulum BDC cadere, quoniam perpendiculum brevius eſt utrolibet radiorum dictam ſubtenſam concludentium, & conſequenter ad peripheriam uſque non pertingit, hoc eſt, ejus extremum punctum O, quod ſubtenſæ CD medium efficit, intra circulum cadit. Sed omnes rectæ lineę, à centro circuli ad quælibet dictæ ſubtendentis puncta, ultimis exceptis, productæ utrolibet concludentium radiorum etiam breviores ſunt, quippe perpendiculo BO propiores (ut probatum eſt ad circuli definitionem). Ipſæ igitur extremis ſuis peripheriam non attingunt; & ideò cuncta dictæ ſubtenſæ puncta ultimis exceptis, quæ linearum, intra nominatos radios concluſarum, extrema ſunt, intra circulum cadunt.

Atque hinc formatur, & confirmatur ſequens propoſitio.

Si quilibet arcus, vel duo quævis puncta in circuli peripheria ſumantur, recta ſumptum hunc arcum ſubtendens, vel accepta hæc puncta connectens, intra circulum cadit. ut probatum eſt.

CONSECTARIUM I.

Eodem artificio probabis rectam, diametri, ſive radii extremitati perpendiculariter inſiſtentem, totam extra circulum cadere, & ipſum in unico puncto contingere.

Nam ſi ex utraque perpendicularis radii parte rectas lineas, à circuli centro, in rectam diametro perpendicularem demittas, tunc perpendicularis radius ſemper erit demiſsâ qualibet remotiore lineâ brevior. Quare cùm perpendicularis radius extremitate ſua circuli peripheriam attingat, omnes ab hoc ⊥lo remotæ rectæ, & ipſo propterea ⊥lo longiores, extra circuli peripheriam protenduntur; & conſequenter omnes omnium rectarum linearum à centro circuli in rectam diametro perpendicularem demiſſarum fines, excepto perpendicularis diametri termino, ſive quod idem eſt, omnia rectæ lineæ diametro perpendiculariter inſiſtentis puncta, præter

Q

unicum, in circuli peripheria poſitum, videlicet ipſius perpendicularis diametri, ſive radii finem, extra circuli peripheriam jaceant neceſſe eſt.

Enimverò ſi recta linea, quæ circulum in uno puncto tangit, in alio adhuc puncto tangere poſſet, ſequeretur ex modò probatis partem illam contingentis, quæ inter illa duo puncta poſita foret, intra circulum cadere; quare circulum ſecaret, contra hypotheſim.

Hinc etiam ſequitur circuli radium, in rectam circulum ipſum contingentem, & ad contactus punctum, demiſſum ipſi contingenti perpendiculariter inſiſtere.

Nam ex antecedente conſectario fit manifeſtum, rectam quamlibet circulum contingentem eum in unico puncto tangere, reliqua verò contingentis puncta extra circuli peripheriam poſita eſſe, & quod ſequitur, omnes rectas à circuli centro ad contingentem ductiles, excepto perpendiculari radio extra circuli peripheriam longiùs abire, ſive ipſas perpendiculari radio longiores eſſe. Quare circuli radius, contingenti, in ipſo contactus puncto occurrens breviſſima erit linea omnium à circuli centro ad contingentem ductilium; Ideoque contingenti perpendiculariter inſiſtet, ut patet ex probatis ad definitionem $\perp^{li}$.

CONSECTARIUM II.

Si circulum quæpiam recta contingat, & à contactu in hanc contingentem $\perp^{lum}$ excitetur ad partes circuli, in excitato perpendiculo circuli centrum poſitum eſt.

DEMONSTRATIO.

Certum eſt ex proximè demonſtratis, actam à circuli centro ad punctum contactus rectam lineam ipſi contingenti perpendiculariter inſiſtere. Atqui ad punctum contactus unicum $\perp^{lum}$ excitari poteſt (*ut in libro definitionum concluſum eſt.*) Igitur in excitato ad contingentem, & ad ipſum contactus punctum $\perp^{lo}$ circuli centrum inveniri neceſſe eſt.

Digitized by Google

APPENDIX I.

Hinc methodus elicitur, in data recta linea circulum contingente, contactus punctum inveniendi.

Demiſſus enim à circuli centro in datam contingentem perpendicularis radius eam in contactus puncto ſecabit. Nam probatum eſt circuli centrum, in $\perp^{lo}$ ſupra contingentem & ad contactus punctum erecto, poſitum eſſe, nec plura $\perp^{la}$ ab eodem puncto ad eandem rectam duci poſſunt. Ductum igitur à circuli centro in propoſitam contingentem $\perp^{lum}$ neceſſariò per quæſitum contactus punctum tranſibit.

APPENDIX II.

Hinc etiam dependet methodus à dato in circuli peripheria puncto rectam lineam ducendi, quæ datum tangat circulum.

Nam ſi ſuper ductam à circuli centro ad datum punctum rectam lineam, atque à dato puncto, quod nempe ductæ lineæ extremum eſt perpendiculum erigatur, abſolutum erit negorium. Erecta namque perpendicularis illa datum circulum, in dato puncto continget, ut probatorum neceſſitas evincit.

APPENDIX III.

Per hoc etiam conſectarium facilè probabitur rectam lineam, circulorum intus ſe contingentium centra nectentem, & quantum opus eſt productam, in contactum circulorum cadere.

CONSTRUCTIO, ET DEMONSTRATIO.

Ductâ enim per punctum mutui circulorum occurſus rectâ lineâ majorem circulum contingente, juxta præcedentem doctrinam. Primò manifeſtum eſt ductam hanc ad majorem circulum contingentem rectam lineam, minoris etiam circuli contingentem fore. Nam tota extra majoris circuli circumferentiam cadit, ex notione contingentiæ, quantò magis igitur extra minoris peripheriam, in majoris peripheria concluſam? Deinde ipſum

Digitized by Google

minorem circulum in dicto mutui circulorum occurſus puncto contingit. Quoniam ergo ducta recta linea propoſitos binos circulos in eodem puncto contingit. Sequitur ex mox probatis ambo contiguorum circulorum centra in eodem (unico dumtaxat exiſtente) $\perp^{lo}$, ſupra dictam contingentem , & ad punctum mutui circulorum occurſus , erecto poſita eſſe : quamobrem recta linea , circulorum intus ſe contingentium centra connectens, pars eſt $\perp^{li}$ dictam contingentem in mutui circulorum occurſus puncto ſecantis, & conſequenter connectens illa recta linea, quantum opus eſt producta , nominatum perpendiculum abſolvet, hoc eſt in circulorum contactum cadet. Quod autem ad aliud punctum minimè pervenire poſſit, inde evidens eſt, quod duæ rectæ commune ſegmentum habere nequeant , quod profectò accideret ſi recta linea propoſitorum circulorum centra connectens, & in ipſorum contactum cadens, aliorsùm adhuc divergeret. Unde modis omnibus verum eſt rectam lineam, circulorum intus ſe contingentium centra nectentem, in contactum circulorum cadere. Quod erat oſtendendum.

ELEMENTUM TERTIUM.

ELEMENTARIS PROPOSITIO.

Duæ rectæ lineæ parallelæ ſunt quando recta ipſas ſecans internos , & ab eadem parte conſtitutos angulos duobus rectis adæquat ; vel quando alternos inter ſe pares efficit ; vel quando internum externo contrapoſito reddit æqualem.

PRIMA PARS.

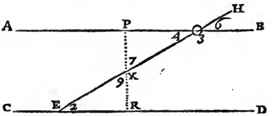
DETERMINATIO CASUUM.

VEL bini interiores , & ab eadem parte exiſtentes anguli inter propoſitas rectas à ſecante generati, necnon per hypotheſim duobus rectis æquivalentes, inter ſe pares ſunt ; vel certè unus altero major eſt, quamvis ambo ſimul ſumpti duos rectos adæquent.

DEMONSTRATIO IN 1° CASU.

Utraque propoſitarum rectarum ad ſecantem perpendicularis eſt propter conceſſam ∠lorum à propoſitis rectis lineis ad ſecantem rectitudinem. Quapropter ſumptis propoſitarum rectarum alterutra pro ſubjecta, & ſecante pro perpendiculo parallelarum deſcriptore, punctum in quo altera propoſitarum rectarum à ſecante dividitur, per convenientem ipſius ſecantis, ſive dicti perpendiculi, parallelarum deſcriptoris motionem, rectam lineam deſcribet, alteri lineæ, quæ pro ſubjecta poſita eſt parallelam, & ipſi ſecanti lineæ perpendicularem (*ex notitia generationis perpendiculi*). Atqui ſecunda ex propoſitis lineis, per nominatum punctum tranſiens, ipſi ſecanti perpendiculariter inſiſtit, ut ab hujus demonſtrationis initio concluſum eſt, neque ab eodem puncto ad eandem rectam duo ⊥la dirigi poſſunt (*ex probatis ad definitionem* ⊥li.) Igitur recta linea, quam dictum punctum deſcribet, eadem omninò eſt quàm propoſitarum ſecunda, & conſequenter illa ſecunda primæ pro ſubjecta poſitæ parallela eſt.

SECUNDUS CASUS. DATUM.



Jam recta E H, ſecans rectas A B & CD, internos, & ab eadem parte conſtitutos ∠los 2, & 3 duobus rectis æquales efficiat.

QUÆSITUM. Dico A B = CD.

CONSTRUCTIO.

Biſecetur recta E O in puncto X, à quo in alterutram parallelarum, ut A B ducatur ⊥lum XP: tum facto E R æquali P O agatur X R.

Digitized by Google

DEMONSTRATIO.

Tam $\angle^{li}$ 2 & 3, quàm $\angle^{li}$ 3 & 4 valent duos rectos (1um *ex hypotheſi*, 2um *ex elemento* 1°.) Ergo $\angle^{li}$ 2 & 3 Π $\angle^{lis}$ 3 & 4; & ablato cummuni $\angle^{lo}$ 3 reliquus $\angle^{lus}$ 2 æquatur reliquo $\angle^{lo}$ 4. Sed latera X E, & E R æquantur lateribus X O, & P O ſigillatim ſumptis (*per conſtructionem*). Quum igitur duo $\triangle^{la}$ E X R, & X P O duo latera duobus lateribus æqualia, & $\angle^{los}$ ab his lateribus comprehenſos æquales habeant, reliqui $\angle^{li}$, videlicet qui ad P & R exiſtunt, & oppoſiti ad X, nimirum 7 & 9 invicem æquabuntur (*ex probatis in elemento* 3°). Sed $\angle^{lus}$ ad P rectus eſt, propter X P ad A B perpendicularitatem. Ergo $\angle^{lus}$ ad R exiſtens etiam rectus erit. Quoniam verò rectæ P X, & X R, ab oppoſitis rectæ H E partibus ductæ, & ad ipſius punctum X concurrentes contrapoſitos $\angle^{los}$ 7 & 9 æquales efficiunt; Idcircò duæ ductæ P X, & X R unicam P X R conſtituunt, (*ex probatis in elemento* 1°) quæ cùm propoſitas lineas A B & C D ad $\angle^{los}$ rectos ſecet in punctis P & R, ut oſtenſum eſt, ſequitur rectas A B & C D invicem parallelas eſſe, ut priùs.

SECUNDA PARS.

DATUM.

In rectas A B, & C D (*vide ſuperiorem figuram*) cadens recta H E 1° alternos $\angle^{los}$ 2 & 4 inter ſe pares; 2° externum $\angle^{lum}$ 6, oppoſito interno 2 æqualem efficiat.

QUÆSITUM.

Oportet oſtendere A B $=$ C D.

DEMONSTRATIO.

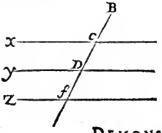
1°, Ex hypotheſi $\angle^{lus}$ 2 Π $\angle^{lo}$ 4, & addito communi $\angle^{lo}$ 3, fient anguli 2 + 3 Π ($\angle^{lis}$ 3 + 4 Π) duobus rectis (*per elementum* 1um.) Ergo A B $=$ C D per primam partem hujus.

2°, Ex hypotheſi $\angle^{lus}$ 2 Π ($\angle^{lo}$ 6 Π) $\angle^{lo}$ 4; Ergo A B $=$ C D per mox probata.

VEL SIC ; Ex hypotheſi $\angle^{lus}$ 6 Π $\angle^{lo}$ 2, & addito commmni $\angle^{lo}$ 3 fient interni $\angle^{li}$ 2 + 3 Π ($\angle^{lis}$ 3 + 6 Π) duobus rectis. Ergo $AB = CD$.

COROLLARIUM I.

Rectæ lineæ eidem rectæ parallelæ, & inter ſe parallelæ ſunt.



DATUM.

Eſto $xc = yD$, & $yD = zf$.

QUÆSITUM.

Dico $xc = zf$.

DEMONSTRATIO.

Ex hypot. eſt $xc = yD$; Ergo $\angle^{lus}$ Bcx Π $\angle^{lo}$ cDy. Pariter ex hypot. eſt $yD = zf$; Ergo($\angle^{lus}$ cDy Π) $\angle$ Bcx Π $\angle^{lo}$ Dfz, externus interno. Ergo $xc = zf$. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM II.

Hinc generalis methodus habetur rectam lineam alteri datæ parallelam, vel utcumque, vel per datum punctum tranſeuntem, vel dato intervallo ab altera diſtantem, ducendi.

Nam 1°, ſi à ſumpto quolibet ſupra datam rectam lineam puncto, quando nullum aſſignatur, vel quando aſſignatur, à dato puncto ad quodvis punctum in data recta linea poſitum agatur recta, ſubjectam datam utcumque ſecans: Atque ad aſſumptum punctum, quod nempe in ſecante ſitum eſt, ponatur $\angle^{lus}$ æqualis uni $\angle^{lorum}$, ad punctum occurſus ductæ ſecantis cum data recta genitorum, ita ut fiant $\angle^{li}$ alterni invicem, vel duo interni, & ab eadem parte conſtituti, duobus rectis æquales, vel tandem ut externus $\angle^{lus}$ interno, & ab eadem parte conſtituto æquetur, erit recta linea dictum $\angle^{lum}$

Digitized by Google

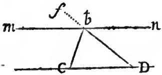
cum nominata ſecante, & ad aſſumptum punctum efficiens datæ rectæ parallela.

2°, Si futurarum parallelarum diſtantia detur, tunc ſuper datam rectam lineam $\perp^{lum}$ erigatur, in quo menſuretur recta datæ diſtantiæ æqualis, ſuper quam ab altero ejus extremo perpendicularis ducatur, ea erit datæ rectæ parallela, ut manifeſtum ſit ex probatis.

COROLLARIUM III.

Cujuſcumque trianguli tres anguli interni duobus rectis æquantur, & ſi producatur unum latus, externus angulus duobus internis, & oppoſitis æqualis erit.

DATUM.



Eſto quodvis $\triangle^{lum}$ bCD, cujus unum latus Db producatur uſque ad f.

QUÆSITA.

Dico 1° hujus $\triangle^{li}$ tres angulos internos, videlicet $\angle bCD + \angle CbD + \angle bDC \sqcap$ duobus $\angle^{lis}$ rectis.

2°, Externum $\angle^{lum}$ $fbC \sqcap \angle bCD + \angle bDC$, qui $\angle^{li}$ ſunt interni, & oppoſiti.

PRÆPARATIO.

Per punctum b ducatur $mn = CD$.

DEMONSTRATIO.

Ex probatis $\angle^{lus}$ $mbC \sqcap \angle^{lo}$ bcD, & $\angle^{lus}$ $nbD \sqcap \angle^{lo}$ bDC (*ob rectarum* CD *&* mn *paralleliſmum.*) Ergo $\angle^{lus}$ $mbC + \angle^{lo} nbD \sqcap \angle^{lo}$ $bCD + \angle^{lo} bDC$, & addito utrimque $\angle^{lo}$ CbD fiunt $\angle CbD + \angle bCD + \angle bDC \sqcap (\angle mbC + \angle CbD + \angle Dbn \sqcap)$ duobus $\angle^{lis}$ rectis.

2°, $\angle^{lus}$ $fbm \sqcap \angle^{lo}$ bDC, & $\angle^{lus}$ $mbC \sqcap \angle^{lo} bCD$ (*quoniam ut prius* $mn = CD$.) Ergo totus $\angle^{lus}$ $fbC \sqcap \angle^{lo}$ $bCD + \angle^{lo}$ bDC, qui duo $\angle^{li}$ ſunt interni & oppoſiti, ut erat oſtendendum.

APPENDIX

APPENDIX I.

Itaque 1°, *Cognitis cujuſcumque trianguli duobus angulis tertius non poterit ignorari; ipſe enim eſt duorum rectorum angulorum differentia à duobus datis angulis ſimul ſumptis.*

2°, *In quovis triangulo ſi unus angulus ſit obtuſus, duo reliqui ſimul ſumpti minores erunt uno recto; ſi verò unus angulus ſit rectus, ſumma duorum reliquorum æquabitur uni recto.*

APPENDIX II.

Hinc etiam ſequitur, *Perpendiculum à quovis rectæ lineæ, ſuper aliam obliquè jacentis puncto in ſubjectam demiſſum ad partes anguli acuti cadere.*

Nam ſi ad partes obtuſi caderet, fieret $\angle^{lum}$, cujus unus $\angle^{lus}$ eſſet rectus; alter verò obtuſus, quod eſt impoſſibile ex mox probatis.

APPENDIX III.

I. FONS INVENTIONIS.

Quoniam ex ſumpto in qualibet figura rectilinea quovis puncto ad omnes figuræ $\angle^{los}$ duci poſſunt rectæ lineæ, quæ figuram in tot $\triangle^{la}$ dividant quot ipſa habet latera; horumque $\triangle^{lorum}$ $\angle^{li}$, quatuor exceptis, circa acceptum punctum exiſtentibus, iidem omninò ſunt, quàm figuræ $\angle^{li}$, ac 1ª figurarum eſt trilatera, cujus interiores anguli omnes duobus rectis æquantur. Ideò

1°, *Figura quævis rectilinea dividitur in triangula duobus pauciora quam eſt numerus, laterum figuram continentium.*

Sic quandrangulum dividitur in duo $\triangle^{la}$, quinquangulum in tria, &c.

2°, *Si è numero laterum cujuſvis figuræ rectilineæ tollatur 2, & reliquus numerus duplicetur; vel ſi è numero laterum duplicato tollatur 4, habebis ſummam angulorum rectorum in rectilinea quavis figura interius comprehenſorum.*

R

Digitized by Google

Sic triangulum in ſe continet duos rectos, quadrangulum quatuor, quinquangulum ſex, &c.

II. FONS INVENTIONIS.

Quoniam verò productis omnibus cujuſvis rectilineæ figuræ lateribus anguli tam interni, quàm externi tot binis rectis angulis æquantur, quot ſunt figuræ latera (*per Elementum* 1um) oſtenſumque ſit interiores cujuſlibet figuræ angulos, ſi quatuor excipias, æquales eſſe tot binis angulis rectis, quot in figura latera numerantur. Igitur

Figuræ cujuſvis rectilineæ anguli exteriores omnes æquantur quatuor rectis angulis.

Deinde quoniam in figura ordinata tot ſunt exteriores anguli invicem æquales, quot figuræ latera. Ideo

Si quatuor anguli recti dividantur per numerum laterum, ſive angulorum: quotus erit quantitas unius anguli exterioris in figura ordinata.

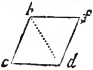
Sic $\angle^{lus}$ exterior in trigono ordinato, ſive æquilatero eſt $\frac{4}{3}$ $\angle^{li}$ recti, ſive gradus $\frac{360}{3}$, in tetragono ordinato ſive in quadrato $\frac{4}{4}$ $\angle^{li}$ recti, ſive gradus $\frac{360}{4}$, &c.

Et quia in figura ordinata ſumma unius $\angle^{li}$ exterioris, & unius interioris duobus $\angle^{lis}$ rectis æquatur, ſuntque omnes interiores $\angle^{li}$ invicem æquales. Ideò

Si quantitas unius anguli exterioris tollatur è duobus rectis: Vel ſi ſumma angulorum rectorum intus poſitorum dividatur per numerum laterum; habebis quantitatem unius anguli interioris in figura ordinata.

COROLLARIUM IV.

Rectæ lineæ, quæ æquales rectas, & parallelas ex adverſo connectunt, etiam æquales ſunt & parallelæ.



DATUM.

Sunto duæ rectæ *df*, & *bo* invicem æquales & parallelæ, quæ duabus rectis *bf* & *od* ex adverſo nectantur.

QUÆSITUM.

Dico connectentes rectas *b f* & *o d* inter ſe æquales eſſe, & parallelas.

DEMONSTRATIO.

Ductâ rectâ *b d*; Quoniam *d f* $=$ *b o*; ideò $\angle^{lus}$ *f d b* Π $\angle^{lo}$ *o b d*. In $\triangle^{lis}$ autem *d b o*, *d f b* latera *d f*, & *b o* æqualia ſunt, (*ex hypotheſi*) & latus *b d* commune, & $\angle^{li}$ *o b d* & *f d b* oſtenſi ſunt æquales; quare (*per elementi tertii doctrinam*) baſis *b f* baſi *d o*, & $\angle^{lus}$ *b d o*, $\angle^{lo}$ *f b d* æquabitur, qui cùm ſint alterni reſpectu linearum *b f*, & *d o*; propterea rectæ *b f* & *d o*, ex probatis æquales, etiam inter ſe parallelæ ſunt, (*per hoc elementum* 3um) ſicut erat oſtendendum.

APPENDIX.

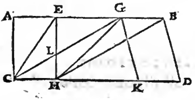
In quovis parallelogrammo oppoſiti anguli, & latera æqualia ſunt, & ipſum diameter bifariam dividit.

Nam probatum eſt quadrilaterum *b d* parallelogrammum eſſe, in quo ($\angle^{li}$ *b d o* & *b d f* Π) $\angle$ *o d f* Π ($\angle$ *o b d*, & *d b f* Π) $\angle$ *o b f*, ſicut eſt oſtenſum, & eâdem argumentatione probabitur $\angle^{lus}$ *d f b* Π $\angle^{lo}$ *b o d*. Quare cùm ipſum parallelogrammum in duo $\triangle^{la}$ æqualia à diametro *b d* dividi ſuprà viderimus, patet propoſitum.

COROLLARIUM V.

Tam parallelogramma, quàm triangula ſuper eadem baſi, vel ſuper æqualibus baſibus, & inter eaſdem parallelas conſtituta, inter ſe æqualia ſunt.

PRIMA PARS.



DATUM.

Super eadem baſi CH, & inter eaſdem parallelas AB, CD conſtituta ſint duo parallelogrāma AH, & CB.

Digitized by Google

Quæsitum.

Dico parallelogramma A H, & C B invicem æquari.

Demonstratio.

Δ^{la} A C G, E H B inter ſe æquilatera ſunt (nam A C Π E H, & C G Π H B, atque etiam A E Π (C H Π) G B per mox probata, & utrimque addita E G fit A G Π E B); Ergo etiam æqualia: & dempto communi Δ^{lo} E L G fiunt quadrilatera A C L E, L H B G æqualia: & utrimque addito Δ^{lo} C L H, erunt parallelogramma A H, & C B inter ſe æqualia, ut erat 1° oſtendendum.

Secunda Pars.

Datum.

Si verò ſuper æqualibus baſibus C H, & K D, & inter eaſdem parallelas A B, C D conſtituta fuerint duo parallelogramma A H, & G D.

Quæsitum.

Dico parallelogramma A H, & G D inter ſe pariter æquari.

Demonstratio.

Ductis enim rectis C G, H B, oſtendetur, ut priùs, tam parallelogrammum A H, quàm parallelogrammum G D æquari parallelogrammo C B; ergo parallelogramma A H, & G D inter ſe æqualia ſunt, ut erat ſecundò oſtendendum.

Pars III.

Denique quia triangula parallelogrammorum eandem baſim, & communem angulum habentium dimidia ſunt, ut oſtenſum eſt, ſuntque illa parallelogramma inter ſe æqualia per mox probata, manifeſta eſt propoſitionis tertia pars.

Appendix.

Fons Inventionis.

Quoniam ex hujus corollarii demonſtratione ſequitur parallelogrammum quodcumque æquari rectangulo,

Digitized by Google

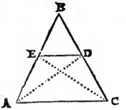
eandem baſim, & eandem altitudinem habente, triangulum verò æquari rectangulo eandem altitudinem & dimidiam baſim habente: Propoſitis igitur quotcumque parallelogrammis, vel triangulis, quorum primi baſis vocetur B, ſecundi β, communis altitudo P, rectangula propoſitis parallelogrammis æqualia erunt $P \times B$, & $P \times \beta$: At rectangula propoſitis Δ^{lis} æqualia erunt $P \times \frac{1}{2} B$, & $P \times \frac{1}{2} \beta$. Atque per proportionum doctrinam fit $P \times B.\ P \times \beta :: B.\ \beta$ vel $P \times \frac{1}{2} B.\ P \times \frac{1}{2} \beta :: \left(\frac{1}{2} B.\ \frac{1}{2} \beta ::\right) B.\ \beta$. Ergo

INVENTUM.

Tam parallelogramma, quàm triangula æquialta ſe habent inter ſe ut baſes: & ſi ſint in ratione baſium, ſunt æquialta, ut oſtenſum eſt.

COROLLARIUM VI.

Quæ ad unum trianguli latus in ipſo triangulo parallela ducitur, proportionaliter ſecat dicti trianguli latera: & ſi quædam recta linea, per ipſum triangulum tranſiens proportionaliter ſecet trianguli latera, ipſa erit ad reliquum latus parallela.



DATUM I.

Offeratur Δ^{lum} A B C, in quo recta E D, lateri A C parallela ducta ſit.

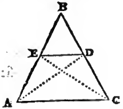
QUÆSITUM.

Dico latera A B, & B C proportionaliter ſecari in punctis E & D, hoc eſt A E. E B :: C D. D B.

DEMONSTRATIO.

Ductis rectis A D, E C fit Δ^{lum} A D E $\sqcap$ Δ^{lo} E D C (nam ambo Δ^{la} ſuper eadem baſi E D, & inter eaſdem

parallelas A C, E D conſtituta ſunt.) Ergo (△ A D E. △ B E D ::) A E. E B :: (△ E D C. △ B E D ::) C D. D B. Quod eſt 1um.



DATUM II.

Jam ſit A E. E B :: C D. D B.

QUÆSITUM.

Oportet oſtendere E D ═ A C.

DEMONSTRATIO.

Ductis ut priùs rectis A D, E C. Ex hypotheſi (A E. E B ::) △ A E D. △ B E D :: (C D. D B ::) △ C E D. △ B E D. Quum ergo △^{la} A E D, & C E D ad idem △ B E D eandem rationem habeant, inter ſe propterea æqualia ſunt, & quoniam ſuper eadem baſi E D, & ex eadem parte conſtituta ſunt, ideò inter eaſdē parallelas E D, A C exiſtunt, quod erat ſecundo loco oſtendendum.

APPENDIX.

Apparet in diagrammate ſuperiori minus △^{lum} B E D, à majori △^{lo} A B C per ductam parallelam E D abſciſſum, æquiangulum eſſe cum dicto majore A B C. Nam ex notitia paralleliſmi exteriores anguli B E D, B D E, interioribus B A C, B C A æquales ſunt.

FONS INVENTIONIS.

Ex propoſitis duobus inæqualibus triangulis, inter ſe æquiangulis, ſi majoris latera longitudine correſpondentium laterum minoris contrahantur; vel ſi minoris latera longitudine correſpondentium laterum majoris producantur, & contractionis, vel prolongationis puncta rectâ lineâ jungantur, manifeſtum eſt ex contractis, vel productis lateribus fieri triangulum, reliquo è propoſitis △^{lis} ęquale. Unde per ante probata oſtendetur propoſita triangula, ob poſitum in eis æquiangulifmū proportionalia habere latera. Ex hoc enim æquiangulifmo naſcitur paralleliſmus inter baſim producti, vel contracti trian-

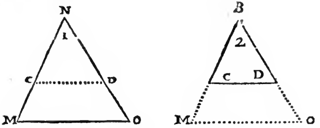
Digitized by Google

guli, & inter baſim alterius, per dictam contractionem, aut productionem priori adnaſcentis, hoc eſt inter rectam productionis, vel contractionis puncta nectentem.

Si verò propoſita Δ^{la} proportionalia habeant latera, unius lateribus, ut ante, alterius correſpondentium laterum longitudine contractis, vel productis, ductâque ad puncta contractionis, vel productionis rectâ lineâ; probabitur, ut ſuperiùs ex poſita proportione inter dictorum Δ^{lorum} latera, ad unum è propoſitis Δ^{lis} aliud æquale, & alteri propoſito ſimile per dictam productionem vel contractionem adnaſci, & prioris latera per baſim hujus inſitivi proportionaliter ſecari. Unde inter has baſes paralleliſmus ex probatis, & tandem propoſitorum triangulorum æquianguliſmus ex parallelarum natura oſtendetur.

Hinc formatur & confirmatur ſequens propoſitio.

Triangula inter ſe æquiangula proportionalia habent latera: Quæ verò proportionalia habent latera inter ſe æquiangula ſunt.



DATUM.

Sunto duo Δ^{la} M N O majus, & C B D minus, quorum ſinguli anguli ad puncta M, N, O exiſtentes æquentur ſingulis angulis ad puncta C, B, D exiſtentibus.

QUÆSITUM.

Oportet oſtendere correſpondentibus $\angle^{lis}$ adjacentia latera proportionalia eſſe, hoc eſt ut latera M N, M O circa $\angle^{lum}$ M exiſtentia ſe habent ad invicem, ita ſe habere inter ſe latera C B, C D, correſpondenti $\angle^{lo}$ C adjacentia & O M. O N :: B D. C D, atque etiam M N. O N :: C B. D B.

CONSTRUCTIO.

In 1^a figura contrahantur majoris Δ^{li} latera longitudine correſpondentium minoris Δ^{li} laterum, circa æqualem angulum exiſtentium, ita ut ex contractis majoris Δ^{li} lateribus ad puncta C & D, atque ex ducta C D oriatur in eo Δ^{lum} C N D, quod cùm minore Δ^{lo} C B D æquiangulum eſt: (nam ex conſtructione C N $\sqcap$ C B, & D N $\sqcap$ D B; atque $\angle$ N $\sqcap$ $\angle$ B. Quare & baſis baſi æquatur & Δ^{lum} Δ^{lo} æquiangulum eſt) Vel ut in 2^a fig. protrahantur minoris Δ^{li} latera longitudine correſpondentium majoris Δ^{li} laterum circa æqualem angulum exiſtentium, ita ut ex productis minoris Δ^{li} lateribus ad puncta M & O, atque ex ducta M O formetur Δ^{lum} M B O, quod etiam ob allatas rationes, cum majore Δ^{lo} M N O æquiangulum eſt.

DEMONSTRATIO.

Ex hypotheſi æquiangulismus eſt inter Δ^{la} M N O & C B D, & per conſtructionem æquiangulismus eſt etiam inter Δ^{la} C N D & C B D. Æquiangulismus igitur erit inter Δ^{la} C N D, M N O. Quare $\angle^{us}$ N C D $\sqcap$ $\angle^{lo}$ N M O, & conſequenter C D $=$ M O. Ergo per antè probata M N. C N :: O N. D N, & alterne M N. O N :: (C N. O N $\sqcap$) B C. B D. Eadem prorſus argumentatione concludetur M N. M O :: B C. C D, vel O N. O M :: B D. D C. Si latera M N, M O, vel O M, O N contrahantur longitudine correſpondentium minoris Δ^{li} laterum B C, C D. vel B D, D C. Nec ſolùm in contracto majori Δ^{lo} locum habet hæc argumentatio, verùm etiam in convenienter producto minori Δ^{lo} idem omninò evincit, ut perſpicuum eſt. Ergo vera eſt propoſitio.

ELEMEN-

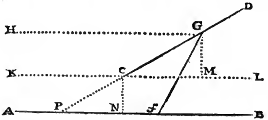
Digitized by Google

ELEMENTUM QUARTUM.

De Imparallelismo.

PROPOSITIO ELEMENTARIS.

CVm in duas rectas recta incidens internos, & ab eadem parte poſitos angulos duobus rectis minores fecerit, imparallelæ ſunt hæ duæ rectæ lineæ; & ſi producantur, ſibi mutuò occurrunt verſus eam partem, in qua poſiti ſunt anguli duobus rectis minores, ſive quod idem eſt, verſus eam partem, ubi reperitur earum intervallum anguſtius.



DATUM.

In rectas A B, & C D incidens recta *f* G internos, & ab eadem parte poſitos angulos C G *f*, & G *f* N duobus rectis minores faciat.

QUÆSITUM.

Dico lineas A B, & C D, quantum opus eſt productas, ſibi invicem occurſuras eſſe verſus partem C & A in qua poſiti ſunt anguli C G *f*, & G *f* N duobus rectis minores.

CONSTRUCTIO.

Per punctum C extremum rectæ C D, agatur ipſi A B parallela K L, ex utraque parte indefinitè producta: & per punctum G ducatur eidem A B altera parallela

S

HG, quæ neceſſariò ſupra rectam CG cadet, vel infra quam punctum C ſive recta CG exiſtet, nimirum ob faciendam $\angle^{lorum}$ HGf, & GfN ſummam duobus rectis æqualem, & conſequenter duobus hypotheticis $\angle^{lis}$ CGf, & GfN majorem. Tum ex puncto C in rectam AB, ſi opus eſſet productam demittatur perpendiculum CN. Deinde, ſi recta Gf ipſi KL ad angulos rectos non eſt, ex puncto G in ſubjectam KL etiam demittatur perpendiculum GM. Poſtremò ut $\perp^{lum}$ GM ad ſuam baſim CM, ita fiat perpendiculum CN ad baſim NP; jungaturque PC.

DEMONSTRATIO.

$\triangle^{la}$ CGM & CPN æquiangula ſunt : (nam per conſtructionem anguli CMG, & CNP recti ſunt; & ſit GM. MC :: CN. NP.) Ergo $\angle^{lus}$ GCM æquatur correſpondenti $\angle^{lo}$ CPN, (ut probatum eſt in Elemento 3°.) id eſt alterno KCP (propter poſitum inter rectas AB & KC parallelíſmum:) & ſic $\angle^{lus}$ GCM $\sqcap$ $\angle^{lo}$ KCP. Quare cùm ad rectam KC, & ad punctum C in ea exiſtens duæ rectæ DC, PC ab oppoſitis partibus ductæ contrapoſitos ad verticem $\angle^{los}$ GCM, & KCP æquales efficiant, hæ ductæ DC & PC ſibi erunt in directum (ex probatis in Elemento 1°,) hoc eſt recta DC continuata pertinget ad punctum P, in recta AB exiſtens. Concurrent igitur propoſitæ rectæ ad punctum M, ut volebat propoſitio.

Digitized by Google

OBSERVATIONES
IN HÆC ELEMENTA GEOMETRICA.

QUIBUS è fontibus univerſalis Matheſeos tam theoria, quàm praxis duceretur, tum etiam quibus præceptis inventa ſingula indigerent, & adhuc quâ methodo tradi deberent, ſuperiùs expoſuimus, & rem ipſam maxima ex parte confecimus. Nunc verò, poſtquàm Definitiones, atque Elementa Geometrica ſunt explicata, dicendum reſtat de illorum utilitate, ac oſtendendum cuncta geometrica ex ipſis per viam demonſtrationis exſurgere, quemadmodum ex phyſicis Elementis naturalia cuncta per viam generationis exiſtunt.

Primò itaque ſi recordemur eorum, quæ hujus capitis initio de vario rectarum linearum inter ſe ſitu dicta ſunt, ac in mentem revocemus ex tranſverſo rectæ lineæ motu planum generari, atque in figuris rectilineis nihil aliud conſiderari poſſe quàm angulorum ab earum lateribus factorum diverſitatem, hoc eſt rectitudinem, aut obliquitatem; aut certè diverſas laterum ad ſe invicem poſitiones, id eſt ipſarum parallelïſmum, aut imparallelïſmum, omninò perſuaſum habebimus geometricam planorum, ſive figurarum rectilinearum ſcientiam à rectarum linearum coincidentia, vel perpendicularitate, vel parallelïſmo, vel imparallelïſmo derivari. Deinde verò quia in illis ſolidis quorum extrema plana ſunt, nihil etiam aliud ad conſiderandum relinquitur, quàm comprehenſi ab ambientibus planis anguli, qui pariter recti ſunt, aut obliqui: aut certè variæ planorum ambientium inter ſe poſitiones, hoc eſt eorum parallelïſmus vel imparallelïſmus; Itaque ſolidorum ∠lorum obliquitas, aut rectitudo, vel ambientium planorum parallelïſmus, aut imparallelïſmus rectis tantùm lineis, quæ certo modo in ipſis planis ducuntur, obſervabilis, & menſurabilis eſt, ut ex definitionibus Euclidis clarè percipitur, minimè dubitabimus.

Digitized by Google

omnem, quę geometricis auxiliis acquiri poteſt, dictorum ſolidorum cognitionem ab enumeratis, & explicatis planorum Elementis ortum habere. Quantum autem ad curvilinea ſpectat, quum illa non cognoſcantur niſi per relationem quam habent curvarum linearum puncta ad rectas lineas, audacter concludamus illud omne, quod ſolâ geometricæ facultatis vi demonſtrari poteſt, à ſæpiùs nominatis Elementis, nimirum rectarum linearum coincidentia, vel perpendicularitate, vel parallelismo, vel imparallelismo ſic dependere, ut geometrica certitudo extra horum fines fruſtra quæratur. Neque enim geometrica appellare debemus quæ utrique quantitatis ſpeciei communia ſunt, ut ea quæ magnitudinibus accidunt ob earum æqualitates, vel inæqualitates, vel ſectiones, vel proportiones, vel commenſurabilitatem. Incommenſurabilitas verò quamvis à magnitudinis eſſentia proficiſcatur, quia tamen numericum quid in conceptu ſuo involuit, daturque numerorum quædam ſpecies ſurdis magnitudinibus exprimendis naturâ ſuâ idonea, meliùs profectò eſt hanc quantitatis affectionem univerſalibus matheſeos principiis, ſicut fecimus, annumerare, quàm illam in Geometricorum Elementorum loco reponere.

Sic ergo à quatuor primis, & claris, & ſimpliciſſimis propoſitionibus, quarum probationes à præcedentibus definitionibus immediatè pendent, illa geometricarum concluſionum immenſa moles exſurgit, firmatur, atque fundatur. Hoc porrò ſic non eſt accipiendum, ut geometricæ demonſtrationes ex ſolis elementis jam ſæpius nominatis conſtare exiſtimentur; nam earum maxima pars aliis aſcitis, & ad utramque quantitatis ſpeciem pertinentibus principiis, ut plurimum conficitur, ſed ſolùm putandum eſt ut in inventionis fonte diximus, ab illis geometricæ facultatis Elementis geometricum robur accipere quidquid in mathematicis geometricam deſiderat ſolutionem.

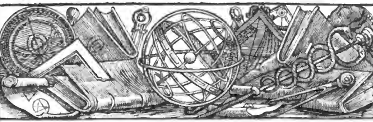
Stabilitis hac ratione certis quibuſdam Geometriæ Elementis, & ad quatuor capita revocatis, nemo eſt,

ut opinor; qui illa non præferat ingenti illi Euclideorum Elementorum, confuſo ſatis ordine diſpoſitorum multitudini, tum quod ob exiguum eorum numerum faciliùs memoriæ mandentur, ac omnia geometrica virtute contineant, quæ in Elementis Euclideis habentur; tum præſertim quod oblato aliquo problemate, vel theoremate geometrico, in hæc pauca Geometriæ Elementa mentis acies facilè convertitur, & nullo ferè negotio cernitur à quonam geometriæ principio quæſiti demonſtratio elici debeat. Atque in hoc maximè conſiſtit inventorum Elementorum utilitas, quâ nulla major hac in re deſiderari poteſt.

Neque ſanè mirum videri debet quod Elementa noſtra paucas propoſitiones contineant, multaque in illis deſint, quæ apud Euclidem leguntur, nam Elementorum nomen tueri non poſſent, ſi, quæ ab eis pendent, etiam pro principiis haberentur. Id ratio & methodus exigit ut principia, quæ elementa vocavimus, ſeorſim tradantur, & à reliquis, quæ inde deduci poſſunt, accuratè diſtinguantur. Quare tantum abeſt ut expoſitis geometriæ elementis propoſitionum paucitas officiat, quin illa multò perfectiora evadant ſi ſolis quatuor propoſitionibus elementaribus abſolvantur, & corollariis quibuſdam exceptis, quæ ſponte ſuâ ex nominatarum propoſitionum demonſtrationibus colliguntur, vel quæ neceſſaria ſunt ad ſequentium probationem, reliqua, quæ paulò longiùs à principiis recedunt, omittantur. Verùm quia hiſce geometricis Elementis ultimam in præſenti opere curam adhibere minimè decrevi, interea ſatis conveniens fore judicaui, ſi quædam non omninò neceſſaria paſſim insererem, ut eorum exemplo breviter oſtenderem quomodo ab his Elementis geometricarum propoſitionum ſeries educi, & quibus vinculis necti deberet. Nunc verò, ut eam methodum paucis attingam quâ geometrica ſuppellex abundè parari poſſit, maximè neceſſarium præceptum eſto, ut ad cujuſque rei naturam, atque generationem diligenter attendamus: Deinde ut agnitâ ejus conſtitutione, & generandi modo, quę

deinde proprietates conſequantur, ſagaci mentis indagine perveſtigemus. Quod fiet (ſi modò nos intra vulgaris geometriæ limites recipere velimus) aut à datis punctis, & notis intervallis circulos vel arcus deſcribendo, qui cognitas lineas ſecent, vel tangant: aut poſitas certo modo rectas lineas producendo, aliiſve rectis connectendo: aut ad datas rectas, vel noviter ductas, parallelas, vel perpendiculares ducendo: aut certè aliquarum inferendo concurſum ex noto in ipſis imparalleliſmo. Nam ſi poſteà tam è tradita in elementis geometricis doctrina, quàm ex enumeratis univerſalis Matheſeos principiis argumenta petantur, innumeræ ferè concluſiones, totidem propoſitionum effectrices non invitæ ſequentur, atque ſic paulatim accreſcet geometriæ corpus. Verùm hac de re plura dicemus, cùm de Mathematicorum argumentorum ſedibus ex profeſſo ſermonem inſtituemus. Cæterum in concinnandis demonſtrationibus maximâ varietate delectatus ſum; nam modò diffuſo, modò contracto verborum apparatu ſum uſus, modò figuras aliquas, vel cum literis, vel ſine literis, modò nullas adhibui. Idque eo præſertim conſilio feci, ut omnes demonſtrandi modos proponerem, & ex aliorum judicio diſcerem quiſnam præ ceteris potior haberetur. Non enim hæc ſolùm mihi, ſed etiam aliis ſcribo. Quidquid ſit non propoſitiones tantùm, ſed maximè earum inter ſe cohærentiam, & ſimul viam qua inveniri debeant oſtendere ubique volui. Ideoque alias corollaria, eas nempe quæ ab elementaribus immediatè derivantur: alias verò appendices, ſeu conſectaria, illas nimirum, quæ à corollariis originem ducunt, pro arbitrio nominavi, planè ut appareat hanc meam ſcriptionem, quam tantùm pro ſpecimine exhibeo, recentem ingenii fœtum eſſe, & rudem adhuc molem, quæ meliorem formam aliquando ſit acceptura.

Digitized by Google



SPECIMINVM MATHEMATICORVM

LIBER SECVNDVS.

CAPVT PRIMVM.

De Methodo Compoſitionis atque Reſolutionis.

INSITA ſunt mentibus noſtris certa quædam veritatis ſemina, à Philoſophis axiomata, communes animi notiones, vel propoſitiones æternæ veritatis nominata, à quibus omnis humana cognitio ducit originem. His veri primordiis, ſive his, ut ita dicam, rationis elementis paulatim enatæ ſunt artes, ac ſcientiæ; longæque illæ conſecutionum ſeries, quas diſciplinas nominamus, è fœcundo eorumdem principiorum ſinu eductæ prodierunt. Quapropter veritatis inveniendæ modum, quod argumentum vocatur, optimè procul dubio definiemus, ſi dicamus id eſſe orationem, in qua quibuſdam poſitis aliud quid neceſſariò ſequitur eò quòd hæc ita poſita ſunt. Duo enim hîc reperiri neceſſe eſt, unum antecedens, cujus cognitio vel per ſe evidens ſit, quales ſunt, ut jam diximus, propoſitiones æternæ veritatis, vel ante per demonſtrationem acquiſita: alterum conſequens quod ex antecedentis poſitione infertur & certitudinem aſſumit. Sic ſuppoſitis

Digitized by Google

communibus animi notionibus, velut inconcuſſis argu-mentorum fundamentis, à ſimplicibus, & prioribus ad magis compoſita, & poſteriora, ſive à cauſa ad effectum: vel à magis compoſitis, & poſterioribus ad ſimplicia, & priora, ſive ab effectu ad cauſam, contrariis omninò ratiocinandi viis, naturalibus tamen, proceditur in inveſtigatione veri. Prima methodus, quæ antecedentia nectit conſequentibus, ſive quæ cauſam cum effectu ſuo conjungit, quoniam id componendo fit veterum artificum idiomate ſynthetice appellata eſt; ſecundam verò, quæ nexum prioris cum poſteriore ratiocinando diſſolvit, ſive quę cauſam ab effectu ſuo diſtinguit, quoniam id reſolutionis opus eſt, Græci vocabulo ſignificante Analyticen dixêre.

Compoſitionis methodum, ſive ſyntheſim obſervat natura in mixtorum generationibus, quæ exiguis profecta initiis, per continuas minutiſſimarum particularum ſenſus effugientium additiones lentiſſimis incrementis augentur, & juſtam molem demum adepta conſpiciuntur.

Reſolutionis verò methodo, ſive Analyſi utitur eadem rerum genitrix ſimul atque deſtrutrix in mixtorum interitu, vel corruptione, quæ vi lethi cohærentiam partium illorum ſuperante, in ea principia, ex quibus compoſita erant, diſſolvuntur.

Parum abſimili ratione in propoſitionibus cujuſcumque generis, iiſque ſive theorematis, ſive problematis ſcientificè conſtituendis potiſſima demonſtrandi methodus, & via omninò naturalis eſt, quâ à principiis, & elementis doctrinæ cujuſque propriis, per continuatas conſequentias componendo proceditur ad propoſiti confirmationem.

Quoniam autem ſæpiſſimè accidit, in problematis præſertim fortuitò oblatis ſolvendis, ut logiſta mediis ad propoſitum arguendum idoneis deſtitutus, à ſcientię principiis, & elementis, naturali ſynthetices viâ ad problematis ſolutionem ratiocinio exquirendam, & concludendam procedere nequeat. In hujuſmodi ignorationis ca-

ſu, qui ferè perpetuus eſt, viam capeſcit retrogradam, & primæ contrariam; facto namque initio ab eo quod in quæſtione eſt, tanquam dato & conceſſo, continuatis conſequentiis reſolvendo progreditur donec in aliquod cognitum principium incidat, à quo quæſiti, quod 1° pro conceſſo aſſumptum erat, veritas deduci queat.

Contrariæ illæ ratiocinandi viæ ut ambæ à natura magiſtra inſtitutæ ſunt, ita æqualem certitudinis gradum obtinent: cùm enim in quavis argumentatione duo ſint, ut jam notavimus, antecedens videlicet, & conſequens; primumque cauſa exiſtat ſecundi, tanquam ab eo procedentis effectus, cui propterea neceſſitatis vinculo aſtringitur, dubium non eſt quin æquè benè, & æquè facilè neceſſitas illa oſtendatur dum à conſequente inchoatur argumentatio, quàm dum ab antecedente initium ducit. Atque idcircò proceſſum logicum per conſequentia in utramque partem æquè firmum, atque apodicticum eſſe neceſſe eſt.

Sed cùm maximi momenti ſit analytices, atque ſynthetices naturam penitùs noviſſe, quam ab authoribus ſatis explicatam non video, qui tantùm pro doctis ſcripſêre, ut ea quæ tam ab ipſis quàm à nobis ſuper ea re dicta ſunt, ab omnibus comprehendi poſſint, utar appoſita, & valdè familiari comparatione, perceptionem noſtram non parum adjuvante. Si quis ergo mechanicarum artium peritus machinam quandam exquiſito artificio elaboratam, & in qua multùm induſtriæ poſuiſſet, horologium, verbi gratiâ, ex multis rotis, tympanis, ponderibus, aliiſque diverſis partibus aptâ diſpoſitione inter ſe nexis conſtructum, ei, qui priùs tale quid non vidiſſet, offerret, diceretque machinam hanc ſolis converſionem ſic imitari, ut ſua etiam motione horas diei tam juſtè, quàm celeſtis ille planeta dividat, indicetque. Homo ille rem admiratus, ut latens in machina artificium exquireret, rotas dentibus ſibi invicem inſertas, obſervatâ priùs earum ordinatione, atque dependentiâ, unas ab aliis ſejungeret, facto à prima initio; tum pondera levaret; & ſic ſolutis, quæ priùs inter ſe cohærebant machinæ parti-

bus, omnibuſque diligenter inſpectis, & attenta mente conſideratis tandem concluderet machinæ motum à ponderibus appenſis impulſionem, moderationem verò à librato pendulo habere, quæ tantò juſtior quantò rotarum ſtructura, & conformatio melior atque concinnior. Idem omninò facit qui propoſitum problema analyticè reſolvit, ſupponit enim jam conſtructum problema, ſive factum eſſe quod poſtulatur, aptâque adhibitâ ratiocinatione quæſitum à datis, tum ipſa data inter ſe ſeparat, quæ quidem omnia priùs in hypotheticam problematis ſtructuram coïverant. Denique poſtquam acri ſtudio inveſtigavit, quomodo quæſitum à datis, aut ipſa data ab aliis cognitis pendeant, à quibus quæſiti veritas elici poſſit, non ſolùm quæſiti poſſibilitatem aut impoſſibilitatem arguit; verùm eò uſque procedit ut impoſſibilitatis cauſas afferre, quando impoſſibile eſt quod proponitur, vel, ſi poſſibile eſt, varios modos, quibus id effici poſſit, reperire valeat.

Jam verò ſi reſoluta dicti horologii compage eidem homini, cui novum, ut jam diximus, ſpectaculum foret horas indicans machina, rotis, tympanis, ponderibus, & reliquis ad horologii fabricam neceſſariis rebus, ipſius horologii loco ſeparatim, & in ejus conſpectu poſitis, primò dictum fuiſſet ex talium inſtrumentorum apparatu, aptâque diſpoſitione machinam cõfici poſſe, ſolis curſum exactè metientem, ille ſtatim naturali ſciendi cupiditate incenſus ſingula hæc vigilibus mentis oculis perluſtrando, tum contrectando manibus, rotas rotis, ut ſibi invicem ſociari poſſunt, aptaret, quibus propria tympana adjiceret, pendulo supernè, vel ad latus poſito, infraque appenſis ponderibus; & ſi vis aliqua adeſſet ingenii omnia locis ſuis ita reſtitueret, & debito ordine diſponeret, ut tandem redeunte compage prior machina conſurgens, in perfectum ut fuerat horologium evaderet: in quo opere faciendo latens in machina artificium ex ipſa operandi forma, quamvis priori contraria, illi ut antè manifeſtum appareret.

Nunc ſi hujus machinæ tempora dimetientis effectum,

cum eo quod in problemate quæritur ; & ea quæ data ſunt, aliaque principia, quando illa quærere opus eſt, cum ſingulis horologii partibus à ſe invicem diſtinctis; atque latens artificium, quod dicti effectus cauſa eſt, & inveniri debet, cum problematis demonſtratione conferre velimus, facile nobis erit ſyntheticum proceſſum in problematibus demonſtrandis, illiuſq; diſcrimen ab analytico regreſſu dignoſcere. Quemadmodum enim horologii conſtructio perfecta abſolutaque cenſetur, quando appenſi ponderis gravitate prima rota ſociam quam motu ſuo dirigit, illaque ſecunda tertiam, & cæteræ cæteras ſic impellunt, ut rotæ ultimæ impulſu agitatum pendulum varias diverſarum, & magnitudine inter ſe diſcrepantium rotarum motiones libratione ſua ſic moderatur, ut inde æquabilis motus naſcatur, cujus ope voluta acus eandem æquabilitatem in circumlatione ſua cuſtodiat: Ita etiam problema perfectè conſtructum, & plenè demonſtratum eſt, cùm in aliquot conſecutionum ſerie, quæ ad ejus probationem adhibetur, ex cogniti antecedentis alicujus principii veritate, omnium inde conſequentium certitudo gradatim ducta, derivataque eſt, ita ut ex firmo plurium, probatarumque concluſionum nexu, id quod quæritur demonſtrationis vim accipiat, & tandem his rationis machinis quod incognitum eſt, velut aliquo veritatis impulſu coactum, in cognitionem noſtram perveniat. Atque hunc argumentandi modum ipſa procedendi ratio ſyntheticum eſſe declarat.

Eſt ſyntheſis tradendis diſciplinis, atque ſcientiis valdè accommodata; inventis namque, ac ritè poſitis alicujus ſcientiæ principiis, ſive elementis facile eſt poſteà plures concluſiones hinc deducere, quæ corpus illius ſcientiæ componant. Verùm in problematibus fortuitò oblatis ſolvendis minùs idonea reperitur, imò omninò inepta, præſertim cùm difficillimi problematis vel theorematis veritas examinari debet; nam ad hujuſmodi propoſitiones demonſtrandas longa eſt concluſionum ſeries percurrenda, antequam ad primam, quæ cæterarum principium eſt, deveniatur. Et qua vi quæſo, qua mentis ſa-

gacitate principium illud tam longè à quæſito diſſitum audita ſola quæſtione indagabitur? rara eſt, & vix conceſſa hominibus ingenii bonitas, vel potiùs ſublimitas, quæ rem tam occultam prima apprehenſione detegat, nec utatur mediis concluſionum ad eam deducentibus. Profectò ut ſynthetice naturaliter adhibetur ad ſcientiarum ſtructuram, atque ordinationem, ita confiteri oportet cùm novum quid, & inſolitum proponitur tunc primùm Analyſeos viam tentandam eſſe, quæ à natura videtur inſtituta ad hujuſmodi quæſtionum nodos diſſolvendos; illa enim ab eo quod quæritur argumentationis ſuæ initium faciens, in plurimarum concluſionum ſerie, ad quæſiti probationem neceſſariâ progreditur primò ad illam à qua quæſitum immediatè pendet, tum tranſit ad proximè ſequentem, ſine qua infirma eſſet prima conſequentia, ex hac ad ſuperiorem, quæ infra poſitarum certitudinem auget, & eo deinceps progreſſu, donec ad primam devenerit, ex cujus cognitione, atque certitudine, per medium concluſionum hinc deductarum veritas in quæſitum, quaſi per alveum dimanat, quæ & ipſum cognitum reddit. Ecquis ad illud principium à quæſito remotiſſimo aſcendet intactis concluſionum interjacentium gradibus? Nemo profectò id efficiet, aut ſi efficiat ſecum tacitè Analyſim exercebit, ut ad illud principium deveniat, ac deinceps opus ſyntheticum exequatur.

Hoc opinor egêre veteres illi artifices, & eximii Matheſeos cultores, quorum egregia apud nos extant ingenii monumenta. Quamvis enim ea quæ nobis reliquerunt ſyntheticè tantùm conſcripta ſint, ipſos tamen in problematum ſolutionibus inveſtigandis, quorum deductiones ordinis quadratici, ut vocant, limites non excedunt Analyticen communiter exercuiſſe, tum effectu manifeſtum, tum diſertè ab ipſis ſignificatum eſt. Unde ſcientias mathematicas, quas ab illis accepimus, artis hujus inventricis beneficio, quamplurimis acceſſionibus locupletatas fuiſſe pro certo exiſtimandum eſt. Nam problemate proceſſu analytico ad ſolutionis ſtatum deducto, liberum, & facile eis fuit facto per Analyſeos veſtigia re-

greſſu demonſtrationem ſyntheticè conſtruere, conſtructamque ſuppreſſa Analyſi problemati attexere.

Mihi equidem olim apud varios authores, præcipuè verò apud eos qui mathematum gloria noſtro ſæculo floruerunt ſubtiliſſimas demonſtrationes, ex incogitatis, & inexpectatis, ſed divino quodam artificio conquiſitis principiis adeò affabrè concinnatas legenti admirantique ſtupor non ſemel incidit unde tanta exiſteret & ingenii, & imaginationis vis, quæ tam immenſam conſequentiarum molem ſuſtinere poſſet, facereque ut tot res, tam longè diſſitæ animo ſimul obverſentur, & quaſi ultrò in argumenti unius ſtructuram coeant atque conſidant. Sed poſtquam Analyſeos amore captus aliquam huic ſtudio exercitationem adjunxi, comperi hos inſignes viros in profundiſſimis difficultatum tenebris, & in una labyrintho, variis quæſtionum ambagibus perplexa ſapienter, ut inde evaderent, analytices filo cæca rexiſſe veſtigia; alias enim ſi ſola ſyntheſi uſi eſſent inextricabili errore plerumque impediti, & voti ſui minimè compotes irritos conatus adhibuiſſent.

Sed ſupponamus in quibuſdam viris, doctis illis quidem, & eruditis tantam ob ea quæ didicerunt peritiam, tantumque ſi velimus acumen reperiri, ut etiam in arduis propoſitionum difficultatibus optatum quandoque ipſorum animis offeratur principium, antequam hinc deductarum, & ad quæſiti probationem neceſſariarum concluſionum texturam fecerint; Id procul dubio non fiet ſine maxima animi contentione, quæ plerumque mentis aciem aut obtundit, aut obrumpit, &, quod magis eſt, illi plus temporis in hac perveſtigatione impendent quàm alter, qui doctrinæ adjumentis deſtitutus, & ſolius Analytices auxilio fretus, ejuſdem quæſtionis ſolutionem aggredietur. Nam ab eo quod in quæſtione eſt exordium ſumens per continuatas conſequentias, quaſi per gradus, facili negotio, & cum quadam non feſſi, ſed potiùs ad operis finem jucundè properantis animi voluptate ad idem principium delabetur. Unde tantùm abeſt ut hæc ars maximis ſemper extollenda laudibus ingeniorum

crux, atque tormentum, ſicut apud pleroſque malè audit, dici mereatur, quin potiùs inventa præcipuè excultaque eſt ut parcatur labori, & non fatigetur animus in operationibus ſuis, verùm inventorum argumentorumque ſubtilitate acuatur, & vires novas acquirat, ſicut poſteà meliùs, atque evidentiùs oſtendam.

Ex dictis, ut puto, ſatis clarè innoteſcit quid, & quantum neceſſaria ſit tam Analyſis, quàm ſyntheſis, quod utriuſque munus, & qua in re una differat ab alia. Nunc igitur tempus eſt poſtquam de duabus his methodis in genere locuti ſumus, ut ad mathematicam Analyſim in ſpecie, cujus potiſſimum cauſa hîc agitur, noſtra propiùs accedat oratio.

DE ANALYSI MATHEMATICA.

ANALYSIS latè ſumptâ vocabuli ſignificatione multas in ſpecies dividitur, habitâ ratione ſubjecti, circa quod ſuum exercet officium. Peculiaris hæc, de qua nunc agimus, in quantitatis, quæ mathematicarum diſciplinarum objectum eſt, conſideratione tota verſatur, & omnes probationes ſuas ad æquationem, tanquam ad artis magiſterium dirigit, atque deducit.

Hoc ut ritè explicetur ſciendum eſt primò ex duarum pluriumve quantitatum inter ſe comparatione naſci tum æqualitatem, tum inæqualitatem. 2° in omni quæſtione duo ut plurimùm reperiri, quæſitum videlicet quod ignoratur, & datum vel data quæ cognita ſunt, ac pro conceſſis aſſumuntur, à quibus rei quæſitæ veritas, atque comprehenſio dependet; quod ſi datum deſit, id arte ſupplendum eſt. Deinde illam quæſiti à datis dependentiam animadverti ignotum cum notis comparando, id eſt hoc in loco inſtitutâ quæſitæ quantitatis cum aliis datis, ſive cognitis comparatione, quam æqualitatis atque inæqualitatis genitricem mox dicebamus. Quoniam autem in omni genere quod ordinatum eſt, ſive quod unico tantùm modo ſe habet, tanquam fixum quid pro cæterorum, ſub eodem genere poſitorum, & in vertibilem

inconſtantiam

inconſtantiam tranſeuntium, regula ſupponi debet, quâ eorum irregularitates dignoſci queant, & ad artem revocari, hinc fit ut ad æqualitatem omnia opera ſua dirigat Analyſta, & ad eam conſequendam omni ſtudio nitatur.

Ampliùs in memoriam revocandum eſt, quod primo capite primi libri docuimus, quinque ſolummodò dari poſſe circa quantitatem operandi formas, ſive regulas, Additionem nimirum, Subductionem, Multiplicationem, Diviſionem, & radicum Extractionem.

His omnibus ritè, ut par eſt, conſideratis facilè intelligemus quod dum in evolvenda problematis difficultate notas quantitates cum incognita, vel incognitis comparando, utraſque per dictarum operationum regulas modis omnibus torquemus, atque mutamus, quo quæſiti veritas elucеſcat, ſæpiſſimè accidit ut ignota quantitas, modò in ſe aliquoties multiplicetur, modò cognitis quantitatibus ipſam vel ſimplicem, vel aliquoties in ſe ductam multiplicantibus, aut dividentibus afficiatur, modò utrumque fiat, nimirum prout major vel minor occurrit problematis difficultas; & quod inde plures exoriuntur termini, alii aliis æquales, ipſo quippe opere ad æqualitatem omnia dirigente, ex quibus aliqui conſtant ex quantitatibus omninò cognitis, aliqui ex ſolis quantitatibus incognitis, omni affectione carentibus; aliqui verò quaſi mixti ex quantitatibus partim cognitis, partim incognitis, diverſimodè inter ſe affectis. Nunc ſi ſummam ex his omnibus terminis compoſitam efficias, æquationem habebis; vel ſi eam paulò aliter conſiderare, atque aliis verbis enunciare velimus, dicemus æquationem eſſe quantitatis quæſitæ, ſive ſimplicis, ſive graduatæ, hoc eſt aliquoties in ſe ductæ, & affectionibus ſæpenumerò implicatæ, cum quantitatibus datis, facta alterius ad alteram comparatione, diſtinctè ordinatam æqualitatem. Quia verò in ipſo operis progreſſu nota cum ignotis confunduntur, ut adſit inter utrumque diſcrimen, quod neceſſarium eſſe ſtatim confitebuntur omnes, ne quid ſit id quod quæritur, aut quomodo affectum ſit, poſteà ignoretur, ſibi ipſi præſtat ars auxilium. Jubet enim ſymbolo

conſtanti, ac benè conſpicuo quæſita à datis diſtinguere; incognitas nimirum quantitates vocalibus *a*, *e*, *i*, *v* &c. conſonis verò *b*, *c*, *d* &c. datas ſignificando. Et quamvis in hujus ſymboli electione libera ſit hominum voluntas (nam quid impedit quominus his vel illis caracteribus atque ſignis, ad libitum effictis magnitudines, numeros, tempora, & cætera hujus generis denotare poſſis, modò ſemper recorderis pro qua peculiari quantitate ſignum quodlibet ſtatuitur) verumtamen nihil aut commodiùs, aut ad juvandam memoriam aptiùs reperiri poteſt alphabeti literis. Illæ enim ſunt notæ apud omnes gentes univerſales, & valdè ſimplices, quibus aſſuevimus ab ætatis initio, & quarum operâ calculus mirum in modum brevis, ac expeditus evadit. Prætereà in alphabeticis elementis tam notabilis eſt differentia inter vocales, atque conſonas, ut ſi hæ quantitates cognitas denotent, illæ verò incognitas, quæſita à datis quàm citiſſimè diſtingues.

Hæc per literas computandi ratio logiſtice ſpecioſa dicitur, & Arithmeticæ generis ejuſdẽ participatione germana eſt; eſt namque Arithmetica logiſtice numeroſa, hoc tantùm inter eas (quantum ad nominis rationem attinet) diſcriminis eſt, quod in arithmetica rerum menſurabilium quantitates per caracteres, ſeu figuras artis proprias numero, ut generali menſura exprimuntur, & computantur; in hac autem per notas litterales, elementa ſcilicet alphabetica, res ipſæ tanquam in ſpecie (ex uſu forenſi recepto vocabulo) ſignificantur, & omnimodè tractantur, unde ſpecioſæ nomen obtinuit.

Illius uſus multò accommodatior eſt quàm praxis numeroſæ; nam in numeroſa numeri à novo quem proferunt ita abſorbentur, ut penitùs diſpareant, nec ullum ſui veſtigium relinquant. At in ſpecioſa permanent ſpecies ſine aliqua mutatione, ſpecimen exhibentes totius operationis; unde non ſolùm in quæſiti notitiam ducunt, ſed etiam theorema generale pro ſolutione conſimilium quæſtionum in aliis quantitatibus datis edocent.

Initur autem literalis hujus notationis calculus hoc modo. aſcitis tribus notis prima videlicet + pro additio-

ne vel affirmatione, quæ plus; ſecunda verò — pro ſubductione, vel negatione, quæ minus ſignificat; atque tertia $\sqrt{}$ pro extractione radicum, oportet tantùm notas illas quantitatibus inter ſe addendis, aut ſubducendis, aut ex quibus radicem extrahere volumus, præfigere, vel combinare literas ut indicetur illas inter ſe ductas, vel ducendas eſſe; vel demùm unam, vel plures ſuper aliam, vel ſuper alias ponere, interjectâ lineolâ in modum fractionis, ad ſignificandum unam, vel plures per aliam, aut per alias diviſas, vel dividendas eſſe. Sic propoſitis quibuſcumque quantitatibus, homogeneis tamen, ſive illæ ſint numeri, ſive magnitudines, ſive ſoni, ſive tempora, &c. quarum una ſignificetur per a, altera per b ſcribo $a + b$ ad illas inter ſe addendas, aut $a - b$ ad ſubtrahendam b ex a, & ab ad multiplicandam unam per alteram, & aa, ſive a^2 ad multiplicandam a in ſe, & aaa vel a^3 ad eandem adhuc ſemel multiplicandam per a, atque ita in infinitum: aut $\frac{b}{a}$ ad dividendam b per a, $\frac{ab}{c}$ ad dividendum productum ex a in b per c, & tandem $\sqrt{a}$ ad extrahendam radicem ex a, & $\sqrt{a+b}$ ad extrahendam radicem ex ſumma $a+b$, quæ bis poſita, & ſemel in ſe ducta ipſam ſummam $a+b$ reſtituat, & $\sqrt[3]{a}$ ad extrahendam radicem ex quantitate a, quæ ter poſita, & bis in ſe ducta ipſam a producat, & ſic in infinitum, adjecto numero, radicis genus indicante.

Jam verò quia quantitates per multiplicationem, atque radicum extractionem ita mutantur, ut aliæ penitùs evadant, neceſſariumque ſæpenumerò eſt ſingulas earum transformationes, quas certis notis expreſſimus, etiam verbis enunciare; ideò productum ex duabus diverſis literis, duas diverſas quantitates ſignificantibus, verbi gratiâ ab, voco bimenſum; productum verò ex tribus ut abc, vel aab trimenſum, ex quatuor, ut $abcd$, vel $aacd$, &c. quadrimenſum, & hoc in infinitum progreſſu, prout illa producta ex duabus, ex tribus, quatuor,

pluribuſve dimenſionibus conſtant. At quando eadem litera aliquoties in ſe ducitur, primum productum, ut aa, vel a^2 voco æquibimenſum, ſecundum verò, ut aaa, vel a^3 æquitrimenſum, tertium ut $aaaa$ vel a^4 æquiquadrimenſum, & eo deinceps ordine, prout eadem litera bis, ter, quater & pluries in ſe ducitur. Hæ productorum ordinatorum ſpecies ſatis apto vocabulo poteſtates etiam vocantur, ita ut quantitas, quæ radicis nomen habet, in primo poteſtatum gradu conſiſtens, ideò prima poteſtas nuncupetur, ſecunda poteſtas cùm illa radix in ſe ducitur, tertia cùm genitum productum adhuc per radicem multiplicatur, & ſic in infinitum. Sic etiam primam radicem, quæ bis poſita, & ſemel in ſe multiplicata quantitatem, cujus radix eſt, reſtituit voco ſubæquibimenſam, ſecundam verò quæ ter poſita, & bis in ſe multiplicata quantitatem cujus radix eſt reponit ſubæquitrimenſam, & ſic in infinitum, eodem ferè modo quo quantitas alterius ſubmultiplex dicitur. His radicibus adhuc alia nomina dare poſſumus, licet enim eam, quæ ſubæquibimenſa vocata eſt, radicem ſecundæ poteſtatis, ſubæquitrimenſam verò, radicem tertiæ poteſtatis appellare, & ſic de cęteris.

Harum appellationum rationem reddere difficile non eſt, nam hæc nomina rebus ita conveniunt, ut vel ipſa prolatio eorum ſignificationem manifeſtet. De antiquis appellationibus nihil dicam: clarè enim apparet illas ad rem, quam ſignificant, confeſtim animo repręſentandam minùs idoneas eſſe noſtris, quibus in hoc opere utemur.

Nec eſt quod miremur Analyticen plures dimenſiones quantitatibus aſſignare, quam eiſdem ipſa natura tribuit; arti enim ſufficit naturam quantum poteſt imitari, ejus veſtigia ſequendo, & ad ejus exemplar omnia cōponendo, promotis cæteroquin ejus limitibus, nam ubi natura deſinit, ibi ars incipit. Propterea quamvis naturaliter non datur tranſitus à tertia dimenſione ad quàrtam, nihilominus tamen artificialiter ad innumeras dimenſiones progreſſio fit, cogente ad id tum operis neceſſitate, tum multiplicationis natura, dimenſionum numerum ſine fi-

ne augentis. Sed in hoc diſcrimen eſt, quod natura nihil genuit unicâ, vel duabus tantummodò dimenſionibus contentum; ſolum corpus creavit trinè dimenſum, cujus dimenſiones ab eo ſunt inſeparabiles; ars verò à quantitate unicam dimenſionem habente, vel quam ſic conſiderat, incipiens multiplicationis, atque diviſionis opera alias, atque alias dimenſiones in infinitum ei ſuperaddit, aut ſuperadditas gradatim, vel ad libitum demit.

Et in arithmeticis optimè quidem intelligimus è plurium æqualium, vel inæqualium numerorum inter ſe ductu, ſive illi numeri abſoluti ſint, ſive radicales, aut ſurdi, & quæcumque tandem ſit ipſorum multitudo, alios prodire numeros. Ut ex ductu $2 \times 2 \times 2 \times 2$ gignitur numerus 16, aut ex ductu $2 \times 3 \times 4 \times 5$, &c. efficitur numerus 120, vel tandem ex ductu $2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}$ oritur ſurdus $6\sqrt{5}$ & ſic de cæteris. Nec etiam dubitamus quin omnes numeri ſint inter ſe homogenei, quamvis ſæpenumerò ſpecie differant, quales ſunt numeri abſoluti cum ſurdis, vel ſurdi unius ſpeciei, cum ſurdis ad aliam ſpeciem pertinentibus comparati; neque adhuc obſcurè comprehendimus quod inde ſequitur, 1° videlicet quoſcumque numeros, propter communem ejuſdem generis participationem, quibuſcumque numeris addi, vel à quibuſcumque numeris detrahi poſſe, cum hac nihilominus differentia, quod numeri inter ſe commenſurabiles poſt additionis, vel ſubductionis opus unicum numerum per has operationes genitum relinquant, incommenſurabiles verò inter ſe dum ſibi invicem adduntur, aut à ſe invicem ſubducuntur ſummam efficiant ex pluribus nominibus compoſitam: Unde binomia, trinomia, & cætera polynomia ducunt originem. Deinde 2° per a^2, a^3 & vel per bd, bcd, &c, ſimileſve compoſitionis notas nihil aliud quàm numeros deſignari, quorum unuſquiſque in tot æquales, inæqualeſve dimenſiones quot ei aſſignare voluerimus, reſolubilis eſt. Ut ſi propoſitum quemvis numerum 64 in duas æquales dimenſiones reſolvere velimus, ipſum deſignabimus per aa, & fiet $a \sqcap 8$ vel ſi

in tres, ipſum ſignificabimus per a^3, & erit $a \,\Pi\, 4$; vel ſi in quatuor, ipſum notabimus per a^4, & fiet $a \,\Pi\, 2\sqrt{2}$. Nam 8×8 vel $4 \times 4 \times 4$ vel $2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \,\Pi\, 64$. Idem de ſurdis ferto judicium, ut ſi proponatur ſurdus numerus $\sqrt{3}$, qui in duas æquales dimenſiones reſolvi debeat ipſum nominabimus aa, & per radicis ſubæquibimenſæ extractionem invenietur $a \,\Pi\, \sqrt[4]{3}$; vel ſi in tres ipſum eumdem vocabimus aaa, & per radicis ſubæquitrimenſæ extractionem invenietur $a \,\Pi\, \sqrt[6]{3}$, & eo in infinitum ordine, nam $\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{3}$ vel $\sqrt[6]{3} \times \sqrt[6]{3} \times \sqrt[6]{3} \,\Pi\, \sqrt{3}$. Pariter ſi eundem propoſitum numerum 64 in duas inæquales dimenſiones reſolvere cupiamus, ipſum appellabimus bd, aut bcd ſi in tres, &c. & tunc una quælibet ex his literis b, c, d infinitos admittet valores, pro infinita duorum vel trium factorum, ex quibus producta bd, vel bcd componi poſſunt varietate; hæc enim omnia numerorum natura ſuſtinet.

At in geometricis multò aliter ſe res habet, nam ſimplex, ſive unius dimenſionis magnitudo magnitudini ex duabus dimenſionibus compoſitæ heterogenea eſt, atque hæc novæ dimenſionis acceſſione genus mutat. Sic quantitates quas bimenſas, trimenſas, atque quadrimenſas vocavimus, & cæteræ plurimenſæ omnes diverſorum graduum heterogeneæ ſunt. Unde ſequitur inter ſolas magnitudines ejuſdem gradus, ſive in quibus æqualis dimenſionum numerus reperitur, vel uno verbo inter poteſtates æque-altas, ut pote inter ſe homogeneas, comparationem inſtitui poſſe, illas inter ſe addendo, vel unas ab aliis ſubducendo.

Præterea ſimplicem, ſive unimenſam magnitudinem, quæ linea, vel longitudo, vel latitudo, bimenſam, vel ęquibimenſam, quę ſuperficies aut rectangulum, aut quadratum, trimenſam, vel æquitrimenſam, quæ ſolidum, ſive corpus, ſive parallebipedum, ſive cubus vocatur facilè nobis animo reprę̨ſentamus; hæc enim omnia

in corpore naturali diſtinguere ſolemus ; reliqua verò multimenſa, quibus ars quatuor, quinque, pluresve dimenſiones tribuit, & quæ naturæ impoſſibilia ſunt, difficiliùs ſub imaginationem cadunt.

Quamobrem ut hoc myſterium tandem reveletur obſervabimus concepta artis Analyticæ theoremata, vel problemata nullo quantitatis genere coërceri, ſed ita latè per omnia vagari ut indifferenter & ad numeros, & ad magnitudines aptari poſſint, dummodò eorum, quæ factu impoſſibilia ſunt, effectionem ars non ſuſcipiat ; hanc enim legem ipſi neceſſitas impoſuit, ut licet ſtatutos à natura fines longè præteriret, nihil tamen contra naturam moliretur. Hac de cauſa priuſquam alicujus Analyticæ propoſitionis, ad ſolutionis ſtatum deductę, veritas in magnitudine, vel in numero examinetur, conſideranda eſt utriuſque quantitatis ſpeciei indoles, quâ animadverſâ videndum utrum id quod proponitur ambarum ſpecierum viribus accommodatum ſit, an verò alicujus ex illis potentiam ſuperet: multa enim in una fieri poſſunt, quæ in altera fieri repugnat. Hoc in numero reponenda ſunt omnia problemata, quæ compoſitas ſupra trinam dimenſionem quantitates reipſa exhiberi volunt, verbi gratiâ, ſi juſſum foret duo æquiquadrimenſa reperire, & exhibere, quorum ſumma datæ quantitati æqualis ſit, problema illud merè numericum eſt, fruſtraque ejus ſolutionem à geometria expectes, quæ præter lineam, ſuperficiem, & ſolidum ſive corpus, reale nihil agnoſcit ; cæteræ magnitudines, quæ pluribus quàm tribus dimenſionibus abundant, & in natura non reperiuntur, ideales ſunt, quarum conſtructionem dare non eſt artis munus, ne quis error hîc committatur ; verùm cogente arduarum quæſtionum difficultate illas ſolummodò producit, iiſque multo cum profectu utitur in toto operis progreſſu, ad inveniendam quæſiti cum datis relationem, quæ niſi per iteratas muliplicationes, & compoſitorum productiones ſæpè agnoſci nequiret. Quando autem id quod quæritur in æquationis ordinatæ involucris adhuc deliteſcens apparuit, tunc radicem ex inventa æquatione extrahendo

compoſitas magnitudines in ſuas dimenſiones ita reſolvit, ut omnes ad unicam dimenſionem reducat, ſolis rectis lineis pro operationibus fructu remanentibus. Atque is eſt omnium operum analyticorum finis, ex quo videre eſt quàm neceſſarium ſit in analyſi omnia geometriæ problemata ad hujuſmodi terminos reducere, ut deinde ad illorum conſtructionem neceſſarium tantùm ſit rectarum quarumdam linearum longitudinem cognoſcere, quod facillimum eſſe judicabimus, ſi conſideremus ex lineę in tranſverſum ductu ſuperficiem, corpus verò, ſive ſolidum ex ſuperficie mota generari.

Verùm in iis non conquieſcit intellectus, vult enim magnitudinum ad plures quàm tres dimenſiones aſcendentium ideam ſibi formare, ad inſtar cæterarum magnitudinum infra poſitarum, & jure merito, nam artificiales illę magnitudines, ſupra naturalem metam evectæ ſemper aliquid materiale in conceptu ſuo involvunt, ſed hoc quid ſit ignoratur. Et ferè hîc dicere ſufficiet, ea quę in geometricis arte fiunt, & componuntur, magnitudines, eſſe eandem inter ſe proportionem habentes quam recta linea, ad aliam rectam lineam; nam facilè eſt efficere ut duarum magnitudinum, cujuſcumque generis illæ ſint, modò in una totidem dimenſiones exiſtant quàm in altera, proportio in rectis lineis conſpiciatur. Sunto enim *abcd*, *efgh*. Inter *a* & *b* reperiatur media proportionalis, quæ ſit *m*; ergo *mm* æquatur *ab*, & conſequenter *mmcd* Π *abcd*. Poſteà ponatur *m*. *c* :: *d*. *k*; ergo *mk* Π *cd*, & conſequenter *mmmk* Π *abcd*. Deinde fiat *m*. *e* :: *f*. *l*. Ergo *ml* Π *ef*; & conſequenter *mlgh* Π *efgh*. Rurſus ponatur *m*. *l* :: *g*. *p*. ergo *mp* Π *lg*, & conſequenter *mmph* Π *mlgh*. Ultimo facto *m*. *p* :: *h*. *q*. habetur *mq* Π *ph*, & conſequenter *mmmq* Π *efgh*, & tandem *mmmk*. *mmmq* :: *k*. *q* ex proportionum regulis. Vel ſi ſumpſiſſem mediam proportionalē inter *e*, & *f* quæ ſit *n*, iiſdem ut priùs conſtitutis ortū fuiſſet *nnnr*, & *nnnſ*, & rectę *r* & *ſ*: diverſæ quidem forent à rectis *k* & *q*, ſed eadem ratio eſſet inter primas, quàm inter ultimas, vel tandem ſi lineam poſuiſſem ad libitum ſumptam

ptam pro primo ſequentis analogiſmi termino, nempe $\zeta . a :: b . x$ repetitâ antecedenti operatione factum fuiſſet $\zeta\zeta\zeta\lambda$. & $\zeta\zeta\zeta\theta$, & rectæ per λ & θ ſignificatæ ſola ſubrogatione alterius literæ, ipſius ζ officio fungentis mutarentur, ſed eam rationem ſervarent quam quæ inter k & q, vel inter r, & $ſ$, reperitur, atque hoc omne juxta naturam proportionum, quarum unaquæque terminis innumeris ſimiliter ſe ſe ad invicem habentibus exprimi poteſt.

Et hæc quidem relationis inter artificialia magnitudinum producta exiſtentis cognitio aliquid lucis affert, ſed correlata ſunt adhuc ignota, nec ſatis videt intellectus quidnam apprehendere debeat ut illa ſibi objicere poſſit. Ut igitur hac in parte nobis ſatisfaciamus recordari oportet præcipuum numerorum munus eſſe ut cujuſlibet quantitatis molem, atque menſuram, præcipuè verò proportiones, quæ inter quanta reperiuntur, explicent; eſt enim proportio, ut alibi diximus, determinata quædam æqualitatis vel inæqualitatis ſpecies, quod numericum eſſe nemo videt. Et benè quidem æqualitatem & inæqualitatem latè ſumptam in rectis lineis abſque ulla numerorum conſideratione comprehendimus, & per rectas lineas exprimimus; verùm cùm ad determinationem proportionum effectricem perventum eſt, tunc procul dubio vocandi ſunt in auxilium numeri, ſine quibus illæ perfectè intelligi nequeunt. Quomodo enim duarum rectarum tibi ignotarum rationem invenire poteris niſi per ambarum menſurationem? & quomodo illas menſurabis abſque numeris, qui menſurationis omnis inſtrumenta ſunt. Enimverò omnia proportionum genera denominationes ſuas à numeris abſolutis, aut ſurdis, prout comparatæ quantitates inter ſe commenſurabiles aut incommenſurabiles exiſtunt, ſortiuntur; atque in univerſa geometriæ conſtitutione, licet diverſa objecta magnitudinis genus participantia reſpiciat, nonniſi relationes, ſive proportiones quædam quæ in eis ſunt, conſiderantur. Unde fortaſſe non malè fecerimus ſi non ſolùm pro magnitudini-

bus, quæ per nimiam compoſitionem ſuam naturæ vires ſuperant, verumetiam pro quibuſcumque aliis compoſitis earum valores per numeros abſolutos, vel ſurdos ſignificabiles ſunt, aliquas non abſtractorum, ſed concretorum numerorum ſpecies mente comprehendamus: nam poſteà facilè intelligemus qua ratione numeralia hæc producta generantur, & quomodò per diviſionem atque radicum extractionem in tot dimenſiones, quot eorum denominatio indicat, reſolubilia ſunt. Sic naturæ defectus, vel potiùs impotentia arte corrigetur, & phantaſia notis imaginum ſpeciebus adjuvabitur.

Et ſanè multò tolerabiliùs mihi videtur magnitudines ſupra trinam dimenſionem aſcendentes arithmeticè per explicatam methodum concipere, quàm eaſdem geometrico more imaginari. Illæ enim inanes ſunt continuæ quantitatis ſpecies, quarum effectio tum factu impoſſibilis, tum mente incomprehenſibilis eſt. Solùm hac in re cavendum eſt ne ſicut numeros omnes naturâ ſuâ ejuſdem generis eſſe, eoſque propterea promiſcuè inter ſe addi, vel unum ab alio detrahi poſſe pro certo tenemus, ita etiam propter conceptiones noſtras numeris nimium alligatas credere velimus, magnitudines omnes inter ſe homogeneas eſſe, quas cujuſcumque alterius additione augere, vel ablatione minuere fas ſit, quod minime licet: nam, ut diximus, magnitudo duabus dimenſionibus contenta magnitudini tres dimenſiones habenti heterogenea eſt, ſicut in univerſum magnitudines omnes, quæ non æque multis dimenſionibus conſtant, quas in unam ſummam coaleſcere poſſe repugnat heterogeneorum lex.

Sic jactis logiſtices univerſalis fundamentis conſequens eſt ut ejus regulas, atque leges breviter exponam.

REGULÆ LOGISTICES SPECIOSÆ,

ET EARUM ORIGINES.

Ante omnia brevitatis ergo pro æqualitatis nota uſurpabimus hanc Π; pro majoritatis ſigno ſequentem ⊏, & contrariam nimirum ⊐ pro minoritate, vel pro minori inæqualitate denotanda. Sic ſcribo *a* Π *b* ad ſignificandum quantitatem *a* æqualem eſſe quantitati *b*, & *a* ⊏ *b* ut indicetur *a* majorem eſſe *b*, vel *a* ⊐ quando *a* minor eſt ipsâ *b*. Hoc ſuppoſito ad regulas veniamus, & pro primæ videlicet Additionis fundamento præmittamus.

AXIOMA.

Quantitatum æqualium contrariis ſignis affectarum ſumma nihil eſt.

Nam quantum additionis ſignum affirmat, ſive ponit, tantumdem ſubductionis ſignum negat, ſive tollit. Sic æquali ab æquali ſubducto nihil remanet,

Ut + *a* & — *a* Π *o*, atque + 2 & — 2 Π *o*. Hinc

COROLLARIUM.

Quantitatum inæqualium contrariis ſignis affectarum ſumma eſt ipſarum reſiduum majoris quantitatis ſigno affectum.

OSTENSIO.

Proponantur duæ inæquales quantitates contrariis ſignis affectæ, nimirum + *a* ⊏, & — *b* ⊐, & ſit earum differentia *x*, itaut + *a* Π + *b* + *x*, unde propoſitæ quantitates erunt + *b* + *x* & — *b*. Atqui per axioma præcedens fit + *b* & — *b* Π *o*, ergo + *a* & — *b* Π + *x*.

Vel ſint — *a* ⊏, + *b* ⊐: & ſit ut priùs earum differentia *x*. Ergo — *a* Π — *b* — *x*, & propoſitæ quantitates erunt — *b* — *x* & + *b*. Atqui per axioma præcedens — *b* & + *b* Π *o*. Ergo — *a* & + *b* Π — *x*, ut volebat corollarium.

Sic in numeris -2 & $(+3 \sqcap) + 2 + 1 \sqcap + 1$; necnon $+2 (-3 \sqcap) - 2 - 1 \sqcap - 1$. Ex his additionis regula ſic colligitur.

REGULA ADDITIONIS.

Si quantitates iiſdem literis notatæ, eodem ſigno afficiantur, numerentur illæ, & earum ſummæ commune ſignum præfigatur. Si verò contraria habeant ſigna, & æquales ſint ponatur 0 pro earum ſumma. Quod, ſi contrariis notis affectæ, inæquales exiſtant, earum aggregatum erit ipſarum reſiduum, majoris ſigno affectmm.

Quantum attinet ad quantitates diverſis literis notatas, oportet tantùm eas ſuis ſignis connectere.

REGULA SUBDUCTIONIS.

Subductio Additione perficitur, mutatis priùs omnibus ſignis quantitatis ſubducendæ.

DEMONSTRATIO MUTATIONIS SIGNORUM

1°, Quando affirmata quantitas ab altera quantitate ſubduci debet, perſpicuum eſt affirmatum ſubducendæ quantitatis ſignum, in negatum, quod nempe ſubductionem factam vel faciendam denotat, mutari debere.

Ut ſi $+b$ ſubduci debeat ex a, reliquum erit $a - b$.

2°, Quando binomia quantitas, cujus unum nomen eſt affirmatum, alterum verò negatum, verbi gratiâ $+c - b$ ab alia quacumque quantitate a ſubducenda eſt, manifeſtè cernitur non peti ut tota quantitas c à propoſita quantitate a dematur, ſed ſolùm ut ejus aliqua pars, videlicet $+c - b$, ſive differentia inter c & b ſubducatur, quæ differentia ſi vocetur d, erit $c \sqcap + d + b$. At ſubducendo quantitatem c integram, unà cum differentia d etiam ſubtrahitur b, quæ ſubduci non debet; quare additione quantitatis b deffectus ille compenſandus eſt.

Vel breviùs quia d ſubduci debet ex a reliquum erit $a - d$, ſive quod idem eſt $a (-c + b \sqcap) - d - b + b$; nam $-b + b \sqcap 0$.

Digitized by Google

3°, Si negata quantitas $-b$ ſubducenda ſit ex a, addita utrimque communi quantitate $+c$, eadem differentia remanebit inter auctas quantitates $a+c$, & $+c-b$ quàm inter 1° poſitas a & b per æqualitatis leges.

Atqui ex probatis ſubducendo $+c-b$ ex $a+c$ remanet $a+c-c+b$, id eſt $a+b$. Ergo ſubducendo $-b$ ex a, relinquitur $a+b$, quod erat oſtendendum.

REGULA MULTIPLICATIONIS, ATQUE DIVISIONIS.

Si ſigna ſint ſimilia producta, vel orta quantitas erit affirmata, ſin diverſa, negata. Id eſt $+$ *in* $+$, *vel* $-$ *in* $-$ *facit* $+$. *At* $-$ *in* $+$, *vel* $+$ *in* $-$ *efficit* $-$.

DEMONSTRATIO REGULÆ.

Dum affirmata quantitas in affirmatam ducitur, affirmatur productam quantitatem affirmari. Dum verò negata ducitur in negatam, negatur productam quantitatem negari.

Unde quemadmodum affirmatio affirmationis, & negatio negationis affirmant; Ita $+$ per $+$, & $-$ per $-$ producit $+$.

Quando verò affirmata quantitas in negatam ducitur, vel negata in affirmatam, affirmo productam quantitatem negari, vel nego affirmari. Ergo ſicut affirmatio negationis, vel negatio affirmationis negant, ita $+$ per $-$, vel $-$ per $+$ producit $-$, quod erat oſtendendum.

MONITUM.

Alias ejuſdem rei demonſtrationes videre poteris apud Authores, & præſertim apud Schootenium in eo libello, quem de Matheſeos univerſalis principiis, ſive potiùs de generalis Logiſtices Regulis accuratè conſcripſit, ubi fusè tradita, & exemplis illuſtrata ſunt, quæ nos hîc leviter tantùm attigimus, ne in re vulgari oleum & operam, quod aiunt, perderemus.

Digitized by Google

CAPUT II.

De ſolutione Æquationum duas dimenſiones habentium.

INVESTIGATIO I.

Per reſolutionem æqualitatis in proportionem.

SCIENDUM 1° eſt omnes duarum dimenſionum æquationes ad ſequentes formulas reduci.

$$+ aa + ca - dd \sqcap o.$$
$$+ aa - ca - dd \sqcap o.$$
$$+ aa - ca + dd \sqcap o.$$
$$+ aa + ca + dd \sqcap o.$$

Eſto 1° $+ aa + ca - dd \sqcap o$, ſive per metatheſim $+ dd \sqcap + aa + ca$, & datam æquationem in proportionem reſolvendo fit $+ a. + d. + c + a \div\div$. Quare hîc eſt ſeries trium continuè proportionalium; & ex datis mediâ d, & extremarum differentiâ c, quæruntur extremæ a ⌉, & $c + a$.

Eſto 2° $+ aa - ca - dd \sqcap o$, ſive per metatheſim $+ dd \sqcap + aa - ca$, & datam æquationem in proportionem reſolvendo fit $+ a. + d. + a - c \div\div$. Quare hîc ut priùs eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis mediâ d, & extremarum differentiâ c, quæruntur extremæ a F, & $+ a - c$.

Eſto 3° $+ aa - ca + dd \sqcap o$, ſive per metatheſim $+ dd \sqcap - aa + ca$, & datam æquationem in proportionem reſolvendo fit $+ a. + d. - a + c \div\div$. Quare hîc etiam eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis mediâ d, & extremarum ſummâ c, quæruntur extremæ a F vel ⌉, & $+ c - a$.

Eſto 4° $+ aa + ca + dd \sqcap o$, ſive per metatheſim $+ dd \sqcap - aa - ca$, & datam æquationem in proportionem reſolvendo fit $+ a. + d. - a - c \div\div$.

Quare hîc adhuc eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis mediâ d, & extremarum ſummâ c, quæruntur extremæ a ꜰ vel ⊓, & $-c-a$. Itaque

PROBLEMA I^um VIETÆ.

In ſerie trium continuè proportionalium, datis mediâ, ſive rectangulo ſub extremis, & extremarum ſummâ, vel differentiâ, ipſas extremas invenire.

Manifeſtum eſt ex præmiſſis propoſitum problema difficultates omnes involvere, quæ in æquationum duas dimenſiones habentium ſolutionibus occurrere poſſunt.

ALITER.

Eſto 1° $+aa+ca-cf \,\Pi\, o$, ſive per metatheſim $+aa \,\Pi\, -ca+cf$, quâ æquatione in proportionem reſoluta fit $+c. +a. -a+f.$ ∺. Quare hîc eſt ſeries trium continuè proportionalium; & ex datis primâ c ꜰ vel ⊓, & ſumma mediæ & alterius extremæ, nimirum f, quæruntur media a, & altera extrema $-a+f$.

Eſto 2° $+aa-ca-cf \,\Pi\, o$, ſive per metatheſim $+aa \,\Pi\, +ca+cf$, quâ æqualitate in proportionem reſolutâ fit $+c. +a. +a+f$ ∺. Quare hîc eſt ſeries trium continuè proportionalium; & ex datis 1ª c ⊓, & f differentiâ mediæ & alterius extremæ, quæruntur media a, & altera extrema $+a+f$.

Eſto 3° $+aa-ca+cf \,\Pi\, o$, ſive per metatheſim $+aa \,\Pi\, +ca-cf$, quâ æqualitate in proportionem reſolutâ fit $+c. +a. +a-f$ ∺. Quare hîc eſt ſeries trium continuè proportionalium; & ex datis 1ª c ꜰ, & differentiâ mediæ, & alterius extremæ, nimirum f quæruntur media a, & altera extrema $+a-f$.

Eſto 4° $+aa+ca+cf \,\Pi\, o$, ſive per metatheſim $+aa \,\Pi\, -ca-cf$, quâ æquatione in proportionem reſolutâ fit $+c. +a. -a-f$ ∺. Quare hîc eſt ſeries trium continuè proportionalium; & ex datis 1ª c ꜰ vel ⊓, & ſumma mediæ, & alterius extremæ, nimirum f, quæruntur media a, & altera extrema $-a-f$. Hinc

PROBLEMA II^{um}. VIETÆ.

In ſerie trium continuè proportionalium datis primâ, cum ſumma vel differentia mediæ, & alterius extremæ, invenire mediam, & alteram extremam.

Manifeſtum etiam eſt propoſitum problema ſicut præcedens difficultates omnes involvere, quæ in bimenſarum æquationum ſolutionibus occurrere poſſunt. Quod adhuc clariùs ex talium æquationum geneſi apparebit.

GENESIS PRÆCEDENTIUM ÆQUATIONUM.

Eſto ſeries trium continuè proportionalium, verbi gratiâ:

$$1^a, \quad \text{media}, \quad 3^a.$$
$$c. \quad a. \quad \frac{aa}{c} \div.$$

Fiat 1°, $+a+\frac{aa}{c}\,\Pi +f$. Ergo $+aa+ca-cf\,\Pi\,o$.

Fiat 2°, $-a+\frac{aa}{c}\,\Pi +f$. Ergo $+aa-ca-cf\,\Pi\,o$.

Fiat 3°, $+a-\frac{aa}{c}\,\Pi \mp f$. Ergo $+aa-ca+cf\,\Pi\,o$.

Fiat 4°, $+a+\frac{aa}{c}\,\Pi -f$. Ergo $+aa+ca+cf\,\Pi\,o$.

INVESTIGATIO II.

Per convenientem additionem ſupplementi, quo æquationis pars, poteſtate radicis, ejuſque gradu implicita deficit à canonica generatione quadratorum ex binomiis.

Eſto 1° $+aa+ca-dd\,\Pi\,o$, ſive per metatheſim $+dd\,\Pi\,+aa+ca$. Utrique æqualitatis parti addatur $+\frac{1}{4}cc$, hoc eſt ſupplementum quo æquationis pars $+aa+ca$ deficit à canonica generatione quadratorum

Digitized by Google

dratorum ex binomiis; quæ quidem geneſis docet binomii cujuſvis æquibimenſum æquari duobus nominum æquibimenſis, plus duplice bimenſo ſub nominibus. Nam ſi ca, ſumatur pro duplice bimenſo ſub nominibus, a, & c, binomii quæſiti nomina erunt $-\!+ a$ & $-\!+ \frac{1}{2} c$, quæ bis in ſe ducta producunt $-\!+ ca$. Supplementum igitur addendum eſt $-\!+ \frac{1}{4} cc$, videlicet æquibimenſum nominis $\frac{1}{2} c$, cùm jam habeatur alterius nominis a æquibimenſum $-\!+ aa$. Quare per dicti ſupplementi additionem fiet $-\!+ \frac{1}{4} cc -\!+ dd \,\Pi\, -\!+ aa -\!+ ca +\!- \frac{1}{4} cc$, & harum æqualium ſummarum radices ſubæquibimenſas ſumendo habetur $+\!- a +\!- \frac{1}{2} c \,\Pi\, +\!- \sqrt{{}^{1}\frac{1}{4} cc +\!- dd}\,|$, vel $- a - \frac{1}{2} c \,\Pi\, +\!- \sqrt{{}^{1}\frac{1}{4} cc -\!+ dd}\,|$ (quoniam ex ductu binomii $+\!- a +\!- \frac{1}{2} c$ in ſeipſum, vel binomii $- a - \frac{1}{2} c$ in ſeipſum ſemper oritur eadem quantitas $+\!- aa +\!- ca +\!- \frac{1}{4} cc$), ergo per metatheſim fit $+\!- a \,\Pi\, - \frac{1}{2} c \pm \sqrt{{}^{1}\frac{1}{4} cc +\!- dd}\,|$.

Eſto 2° $+\!- aa - ca - dd \,\Pi\, o$ ſive per metatheſim $+\!- dd \,\Pi\, -\!+ aa - ca$, & utrimque addito $-\!+ \frac{1}{4} cc$ habetur $-\!+ \frac{1}{4} cc +\!- dd \,\Pi\, -\!+ aa - ca -\!+ \frac{1}{4} cc$, & harum æqualium ſummarum radices ſubæquibimenſas ſumendo fit $+\!- a - \frac{1}{2} c \,\Pi\, \sqrt{{}^{1}\frac{1}{4} cc -\!+ dd}\,|$, vel $- a -\!+ \frac{1}{2} c \,\Pi\, \sqrt{{}^{1}\frac{1}{4} cc -\!+ dd}\,|$ (quoniam ut priùs ſive ducas binomium $-\!+ a - \frac{1}{2} c$ in ſe, ſive binomium $- a -\!+ \frac{1}{2} c$ etiam

in ſe, ſemper producetur $+aa - ca + \frac{1}{4}cc$), ergo $+a \Pi + \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc + dd}$.

Eſto 3° $+aa - ca + dd \Pi o$, vel per metatheſim $+aa - ca \Pi - dd$, & utrimque addito $\frac{1}{4}cc$, fit $+aa - ca + \frac{1}{4}cc \Pi + \frac{1}{4}cc - dd$, & harum æqualium ſummarum radices ſubæquibimenſas ſumendo habetur $+a - \frac{1}{2}c \Pi \sqrt{\frac{1}{4}cc - dd}$ vel $-a + \frac{1}{2}c \Pi \sqrt{\frac{1}{4}cc - dd}$, ob rationem ſuperiùs allatam. Ergo $+a \Pi + \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{2}cc - dd}$.

Eſto 4°. $+aa + ca + dd \Pi o$, vel per metatheſim $-dd \Pi + aa + ca$, & utrimque addito $+\frac{1}{4}cc$ fit $+\frac{1}{4}cc - dd \Pi + aa + ca + \frac{1}{4}cc$, & harum æqualium ſummarum radices ſubæquibimenſas ſumendo habetur $+a + \frac{1}{2}c \Pi \sqrt{\frac{1}{4}cc - dd}$, vel $-a - \frac{1}{2}c \Pi \sqrt{\frac{1}{4}cc - dd}$ ob rationem ſupra allatam. Ergo $+a \Pi - \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - dd}$.

OBSERVATIO.

Per 1^{am} inveſtigationem innoteſcit quibus operationibus indigeat bimenſarum æquationum ſolutio, ſed opus ipſum exequitur ſecunda per ſolam radicis extractionem: quæ quidem operatio ſimul oſtendit quot radicibus conſtet unaquælibet æquatio. Nam quæ in 1^{am}, & 2^{am} formulam incidunt duabus conſtant radicibus unâ negatâ, alterâ affirmatâ, & nulli determinationi ſunt obnoxiæ. Quæ vero ad 3^{am}, & 4^{am} formulam pertinent duabus pa-

riter conſtant radicibus, ſed affirmatis, & hanc limitationem patiuntur ut requiratur $+\frac{1}{4}\,cc \sqcap + dd$; alias enim harum æquationum radices evadent ſurdo-negatæ, quas eaſdem imaginarias Carteſius appellat.

Verùm ut quàm facillimè inveniantur bimenſarum æquationum radices, ordinentur earum termini hoc qui ſequitur modo:

$$+aa \sqcap -ca + dd.$$
$$+aa \sqcap +ca + dd.$$
$$+aa \sqcap +ca - dd.$$
$$+aa \sqcap -ca - dd.$$

Et fiet $+a \sqcap .\ \frac{1}{2}c \pm \sqrt{+\frac{1}{4}cc\ .\ dd}$. pro Regula generali ſolvendarum æquationum duas dimenſiones habentium. Quantitates verò $\frac{1}{2}c$ & dd, quæ hîc nullo ſigno notantur, iiſdem ſignis afficiendæ ſunt, quibus in propoſita æquatione afficiebantur.

Vel ordinentur earum termini, ſicut ab initio factum eſt, nimirum.

$$+aa + ca - dd \sqcap o.$$
$$+aa - ca - dd \sqcap o.$$
$$+aa - ca + dd \sqcap o.$$
$$+aa + ca + dd \sqcap o.$$

Et fiet $+a \sqcap -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{+\frac{1}{4}cc - dd}$ etiam pro Regula generali ſolvendarum æquationum duas dimenſiones habentium. Vel fortaſſe meliùs ſi pro c ſcribatur p, & q pro dd. Sic erit generalis Regula $+a \sqcap -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$ quæ ad omnes caſus ſe extendit, ubi p denotat quantitatem 2di termini affectam ſuis ſignis + vel —, multiplicandam in $-\frac{1}{2}$: q verò quantitatem tertii termini, etiam ſuis ſignis + vel — affectam, ac

per ſignum — pariter multiplicandam.

Hæc autem generalis Regula cum ſimilibus aliis, tam pro ſolutione, quàm transformatione æquationum in quolibet gradu exiſtentium, colligitur ſupponendo omnes æquationis terminos eſſe affirmatos, ſive notatos ſigno $+$, ut accidit in æquationibus 4æ formulæ, quando videlicet æquatio ita diſponitur ut omnes ejus termini ab una parte ſtent, ſive nihilo ſint æquales. Verbi gratiâ, ponatur $+aa+pa+q \Pi o$, per ſupra traditam doctrinam habetur pro hujus æquationis radice $+a \Pi -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{+\frac{1}{4}pp-q}$.

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Detur qualibet æquatio numerica $+aa-2a-5 \Pi o$ hic $p \Pi -2$ & $q \Pi -5$. Quare juxta Canonis leges oritur $+a \Pi +1 \pm \sqrt{+1+5}$, & ſic de aliis.

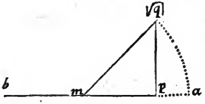
Secundum hanc valde ingenioſam methodum, quæ à D. Huddenio inſigni Mathematico inventa eſt, ut omnes æquationum caſus, qui ex ſignorum diverſitate oriuntur, ad unum refferri, & ſic multi labores reſcindi queant, cæteras Regulas tradam, ſive pro æquationum quarumlibet ſolutione, ſive pro earumdem transformatione, aut depreſſione, ne ſæpiùs idem repetere cogar.

JAM SEQUITUR GEOMETRICA BIMENSARUM ÆQUATIONUM SOLUTIO E' PRÆDICTO RADICUM, AB HIS ÆQUATIONIBUS EXTRAHENDARUM CANONE, TANQUAM E FONTE DERIVATA.

Digitized by Google

REGULA I^a.

Pro ſolutione Geometrica bimenſarum æquationum 1ᵉ & 2ᵉ formulæ.

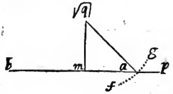


Eſto 1° $+ aa \,\Pi\, + pa + q$ vel $+ aa \,\Pi\, - pa + q$. Per Canonis leges fit $+ a \,\Pi\, \pm \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$ Æquibiſecetur $bp \,\Pi\, p$ in puncto m; tum puncto p, ipſi bp erigatur ⊥lum $p\sqrt{q} \,\Pi\, \sqrt{q}$. Deinde centro m, intervallo $m\sqrt{q}$ deſcribatur circuli arcus $\sqrt{q}\,a$ ſecans bp indefinitè productam in puncto a. Et erit $ab \,\Pi\, a$ quando in æquatione habetur $+ pa$; vel erit $ap \,\Pi\, a$ quando in æquatione eſt $- pa$.

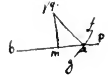
Nam $+ ba \,\Pi\, (+bm) + \frac{1}{2}p$ $(+ma \,\Pi\, + m\sqrt{q} \,\Pi)$ $+ \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$ & $+ ap \,\Pi\,$ $(- mp \,\Pi\,) - \frac{1}{2}p$ $(+ ma \,\Pi) + \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$.

REGULA II^a.

Pro ſolutione Geometrica bimenſarum æquationum, quæ in 3am & 4am formulam incidunt.



Eſto 2° $+ aa \,\Pi\, + pa - q$, vel $+ aa \,\Pi\, - pa - q$. Æquibiſecetur ut priùs recta $bp \,\Pi\, p$ in puncto m, à quo ad ipſam bp erigatur ⊥lum $m\sqrt{q} \,\Pi\, \sqrt{q}$. Tum centro $\overline{q}|$ intervallo $\overline{q}|\,a \,\Pi\, bm$, vel mp deſcriba-



tur circuli arcus fg, ſecans rectam bp in puncto a, (nam ſi arcus fg rectam bp non ſecaret propoſitæ æquationis radices eſſent ſurdo-negatæ) & erit ba vel ap Π a.

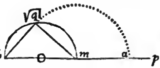
$$\text{Nam} + ba \; \Pi \; (+ bm \; \Pi) + \frac{1}{2} p \; (+- ma \; \Pi) + \sqrt{\frac{1}{4} pp - q}\,\Big| . \text{Et} + ap \; \Pi \; (+ mp \; \Pi) +- \frac{1}{2} p \; (- ma \; \Pi) - \sqrt{\frac{1}{4} pp - q}\,\Big| .$$

OBSERVATIO.

Tradita methodus extrahendarum radicum ab æquatione everſa $+- aa - pa +- q$ Π o abſque ullius ad bp parallelæ ope perficitur, quam tamen parallelam omnes alii, ut idem præſtent ducere coguntur.

Everſam cum Vieta æquationem intelligo quando ſtantibus ab una æquationis parte omnibus terminis (qui propterea nihilo ſunt æquales) extremi termini eodem ſigno afficiuntur.

SCHOLIUM Ium.

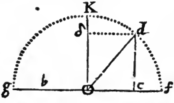


Poteſt præcedens æquatio $+ aa - pa +- q$ Π o ſolvi abſque ductu ullius ⊥li, nempe æquibiſecando bm in puncto o. Nam ſi ab eo tanquam centro, & radio bo, vel mo deſcribatur circulus, in quo aptetur recta $b\sqrt{q}\,|$ Π $\sqrt{q}\,|$ (quæ ſemper eſt minor diametro bm, niſi propoſita æquatio radices habeat ſurdo-negatas, ut jam notavimus) & fiat ma Π $m\sqrt{q}\,|$ erunt ut prius ba, & ap radices propoſitæ æquationis.

SCHOLIUM II.

Primæ inveſtigationis doctrinâ adjuti poteramus ſtatim prædictarum æquationum radices exhibere. Quoniam enim per inventum ex illa indagatione problema mone-

mur omnem bimenſas æquationes ſolvendi difficultatem in eo conſiſtere ut ex datis mediâ, & extremarum ſummâ, vel differentiâ in ſerie trium continuè proportionalium inveniantur extremæ.



Ad hunc finem petatur è Geometricis canonica trium continuè proportionalium generatio, deſcripto nempe quolibet ſemicirculo $o\ g\ K\ d\ f$, & ſuper ejus diametrum $g\ f$ erecto $\perp^{lo}$ $d\ c$, circumferentiam ſecante in puncto d.

Jam quia in ſerie trium continuè proportionalium $g\ c.\ c\ d.\ c\ f$, datur extremarum ſumma $g\ f$, & mediâ $c\ d$, ſed non punctum c, quod ſolum ignoratur. Ut illud inveniamus, ſuper data $g\ f$, tanquam diametro deſcribatur ſemicirculus $o\ g\ K\ d\ f$, a cujus centro o excitetur $\perp^{lum}$ $o\ K$, circumferentiam attingens in puncto K. Tum facto $o\ \delta\ \Pi\ c\ d$, ductâque $\delta\ d = g\ f$ circumferentiam ſecante in puncto d. Si à puncto d, ſic invento, in ipſam $g\ f$ demittatur $\perp^{lum}$ $d\ c$, obtinebitur quæſitum punctum c.

Si vero datur extremarum differentia $b\ c$, cum media $c\ d$; jungantur illæ ad angulum rectum, æquibiſectâque $b\ c$ in o, ducatur $o\ d$, quæ diameter erit circuli trium continuè proportionalium quæſitarum genitoris.

MONITUM.

Si haberetur $a^4.\ c^2a^2.\ c^3d\ \Pi\ o$. Facto $a\ \Pi\ c\ e$ erit. $c^2e^2.\ c^3e.\ c^3d\ \Pi\ o$, id eſt $e^2.\ c\ e.\ c\ d\ \Pi\ o$. cognita autem e, ſtatim noſcetur a, per ſuppoſitionem. Quare hæc, & huic ſimiles æquationes per traditas regulas ſolvi debent.

METHODUS BIMENSAS ÆQUATIONES DIRECTAS IN EVERSAS TRANSFORMANDI, AC SIMUL ILLAS INFINITIS MODIS SOLVENDI.

Proponatur directa æquatio bimenſa $+\ a\ a + c\ a - c\ d\ \Pi\ o$, quæ in everſam transformanda, & ſimul infinitis modis ſolvenda ſit.

Quæratur valor everſæ $+ee \begin{array}{l} -2me \\ -\frac{mc}{d} \end{array} + m^2 \Pi o$,

in qua m arbitrabilis cùm ſit, ſimul modus habetur illam infinitis modis ſolvendi.

Cognita autem e, ſtatim noſcetur a, etenim $\frac{m\sqrt{cd}}{\sqrt{me}} \Pi a$.

ORDO CONSTRUCTIONIS.

Fiat 1° $d.\ m :: c.\ n \Pi \frac{mc}{d}$

2°. $2m + n \Pi z$.

3°. $\frac{1}{4} zz - mm \Pi gg$.

4°. $\frac{1}{2} z \pm g \Pi + f$.

5°. $\left\{ \begin{array}{l} c.\ r.\ d \div \\ f.\ K.\ m \div \end{array} \right.$

6°. $K.\ m :: r.\ \frac{mr}{K} \Pi a$.

EXPLICATIO NOTARUM.

Id eſt, ſi ad d, m, c inveniatur 4ª proportionalis n; & ſumma $+ 2m + n$ æqualis ſit z, differentia verò inter $+ \frac{1}{4} zz$ & $- mm$ æquetur gg; ac ſumma vel differentia $\frac{1}{2} z \pm g$ æqualis ſit f atque inter c & d, nec non inter f, & m reperiantur mediæ proportionales r, & K; ac tandem ad K, m, r ponatur 4ª proportionalis, illa erit æqualis quæſitæ a.

ILLUSTRATIO PER NUMEROS.

Proponatur in numeris directa æquatio bimenſa $+ aa + 8a - 48 x o$. Hîc $c \Pi 8$, & $48 \Pi cd$, & conſequenter

ſequenter $\frac{48}{8}\ (\ 6\ \Pi\ \frac{cd}{c}\ (\ d$. Eſto m quicumque numerus, verbi gratiâ, 10.

1° $(\ d.\ m :\cdot\ c.\ n\ \Pi\ \frac{mc}{d}\ \Pi\ )\ 6.10 :: 8.\frac{40}{3}\ \Pi\ n$.

2° $(\ 2m + n\ \Pi + 20 + \frac{40}{3}\ \Pi\ ) + \frac{100}{3}\ \Pi\ z$.

3° $(\ \frac{1}{4}\ zz - mm\ \Pi + \frac{2500}{9} - 100\ \Pi\ ) + \frac{1600}{9}\ \Pi + gg$.

4° $(\ + \frac{1}{2}\ z \pm g\ \Pi + \frac{50}{3} \pm \frac{40}{3}\ \Pi\ ) + 30$, vel $+ \frac{10}{3}\ \Pi + f$.

5° $(\ \sqrt{cd}\ \Pi\ )\ \sqrt{48}\ \Pi\ r$. & $(\ \sqrt{fm}\ \Pi\ )\ \sqrt{300}\ \Pi\ 10\sqrt{3}\ \Pi\ K$, vel $\sqrt{\frac{100}{3}}\ \Pi\ \frac{10}{\sqrt{3}}\ \Pi\ K$.

Ergo $(\ \frac{mr}{K}\ \Pi\ \frac{+10\sqrt{48}}{+10\sqrt{3}}\ \Pi\ ) + 4\ \Pi\ a$. vel $(\ \frac{+10\sqrt{48}}{\frac{+10}{\sqrt{3}}}\ \Pi\ \sqrt{144}\ \Pi\ ) + 12\ \Pi\ a$.

Quod quidem verum eſt, nam propoſitæ æquationis radices ſunt +4 &—12. cum hac ſola differentia quod radix negata —12, hîc tranſit in affirmatam propter æquationem everſam.

$+ ee - 2me + mm\ \Pi\ o$, cujus hîc facta eſt reſolutio per $-\frac{mc}{d}$ canonis leges..

Poteſt etiam everſa æquatio in directam transformari, ac ſimul infinitis modis ſolvi, quamquam arbitrabilis litera, quæ in invenienda æquatione, ad hunc effectum neceſſaria aliquam limitationem pati debeat.

Digitized by Google

ALIA METHODUS BIMENSAS ÆQUATIONES DIRECTAS IN EVERSAS TRANSFORMANDI.

Poſtquam propoſita æquatio ad hanc formam $+ a^2 + ca - cf \, \Pi \, o$ reducta eſt, quæratur valor ſequentis æquationis everſæ $+ ee \left.\begin{matrix} -2f \\ -c \end{matrix}\right\} e + ff \, \Pi \, o$. Et erit $f - e \, \Pi \, a$.

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Eſto $+ aa + 3a - 10 \, \Pi \, o$. Hîc $+ 3 \, \Pi + c$, & $+ \frac{10}{3} \, \Pi + f$. Igitur ex canonis lege habetur $+ ee \left.\begin{matrix} -\frac{20}{3} \\ -3 \end{matrix}\right\} e + \frac{100}{9} \, \Pi \, o$. Ideſt $+ ee - \frac{29}{3} e + \frac{100}{9} \, \Pi \, o$, & poſito $\frac{y}{3} \, \Pi \, e$ fit $+ yy - 29y + 100 \, \Pi \, o$, eſt autem $+ y \, \Pi + \frac{29}{2} + \pm \left(\sqrt{+ \frac{841}{4} - 100} \, \Pi \right) \frac{21}{2}$. Ideſt $y \, \Pi + 25$, vel $+ 4$. Ergo $e \, \Pi + \frac{25}{3}$, vel $+ \frac{4}{3}$ & conſequenter juxta regulam fit $+ a \, \Pi + \frac{10}{3} - \frac{4}{3}$, vel $+ \frac{10}{3} - \frac{25}{3}$. Ideſt $+ a \, \Pi + 2$, vel $- 5$. Quod quidem verum eſt, nam propoſitæ æquationis radices ſunt $+ 2$ & $- 5$.

Atque ſic omnes bimenſæ æquationes per unicam, eamque valde ſimplicem regulam ſolvi poſſunt.

CAPUT III.

De Æquationibus trium dimenſionum, earumque ſolutione.

INVESTIGATIO I.

Per reſolutionem æqualitatis in proportionem, pro trimenſis æquationibus, ſecundo termino carentibus.

Illæ omnes ad ſequentes formulas reducuntur.

$$+ a^3 + cca - ccd \;\Pi\; o.$$
$$+ a^3 + cca + ccd \;\Pi\; o.$$
$$+ a^3 - cca - ccd \;\Pi\; o.$$
$$+ a^3 - cca + ccd \;\Pi\; o.$$

Eſto 1° $+ a^3 + cca - ccd \;\Pi\; o$, ſive per metatheſim $+ a^3 + cca \;\Pi + ccd$. Ergo $+ cc. + cc + aa :: + a. + d$. Ideſt □ 1^x. □ 1^x + □ 2^x :: 2^a. $2^a + 4^a$. Quare hîc eſt intelligenda ſeries quatuor continuè proportionalium, & ex datis primâ c F vel η, & d aggregato 2^x, & 4^x quæritur 2^a a.

VEL SIC. Per aliam metatheſim habetur $+ a^3 \;\Pi - cca + ccd$. Ergo $+ cc. + aa :: + a. - a + d$. Ideſt □ 1^x. □ 2^x :: 2^a. 4^a. Quare hîc ad huc intelligenda eſt ſeries quatuor continuè proportionalium, & ex datis 1^a c F, vel η, & d aggregato 2^x & 4^x, quæritur 2^a a, ut priùs.

VEL SIC FACILIUS. Per 1^{am} metatheſim fit $+ a^3 + cca \;\Pi + ccd$. Ergo $+ \frac{a^3}{cc} + a \;\Pi + d$. Atqui $c. a. \frac{a^2}{c}. \frac{a^3}{cc}$ ∺. Hîc ergo ut priùs eſt intelligenda ſeries quatuor continuè proportionalium, & ex datis 1^a c F vel η, & d aggregato 2^x, & 4^x quæritur 2^a a.

EXEMPLUM 1um IN NUMERIS ABSOLUTIS.

Eſto $+ a^3 + 64a - 320 \;\Pi\; o$. Eſt hîc intelligenda ſeries quatuor continuè proportionalium, nimirum 8. 4. 2. 1 ∺ & fit 1^a $c \;\Pi\; 8$, 2^a $a \;\Pi\; 4$. At d aggregatum 2^x & $4^x \;\Pi\; 5$.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS ABSOLUTIS.

Eſto $+ a^3 + 1a - 10 \;\Pi\; o$. Eſt hîc intelligenda ſeries quatuor continuè proportionalium, nimirum 1. 2. 4. 8 ∺, & fit 1^a $c \;\Pi\; 1$, 2ª verò $a \;\Pi\; 2$; At d aggregatum 2^x, & $4^x \;\Pi\; 10$.

EXEMPLUM 1um IN NUMERIS SURDIS.

Eſto $+ a^3 + 2a - 12 \;\Pi\; o$. ſunt hîc quatuor continuè

proportionales intelligendæ, nempe $\sqrt{2}\,.\,2\,.\,4\,.\,\frac{4}{\sqrt{2}}\div$,

& fit $1^a\ c\ \Pi\ \sqrt{2}$, 2ª verò $a\ \Pi\ 2$. At d aggregatum $2^{\ae}$, & $4^{\ae}$ videlicet 6.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS SURDIS.

Eſto $+ a^3 + 8a - 24\ \Pi\ o$. Sunt hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, nempe $1\sqrt{2}\,.\,2\,.\,\sqrt{2}\,.\,1 \div$, & fit $1^a\ c\ \Pi\ 2\sqrt{2}$, 2ª verò $a\ \Pi\ 2$, At d aggregatum $2^{\ae}$ & $4^{\ae}$, videlicet 3.

Eſto $2^o + a^3 + cca + ccd\ \Pi\ o$, ſive per metatheſim $+ a^3 + cca\ \Pi - ccd$. Ergo $+ cc. + cc + aa :: + a. - d$. Ideſt $\square\, 1^{\ae}. \square\, 1^{\ae} + \square\, 2^{\ae} :: 2^a. 2^a + 4^a$. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis $1^a\ c\ \Pi$ vel Π, cum d aggregato $2^{\ae}$ & $4^{\ae}$, quæritur $2^a\ a$, ut priùs.

VEL SIC. Per aliam metatheſim habetur $+ a^3\ \Pi - cca - ccd$. Ergo $+ cc. + aa :: + a. - a - d$. Ideſt $\square\, 1^{\ae}. \square\, 2^{\ae} :: 2^a. 4^a$. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis $1^a\ c\ \Pi$, vel Π, cum d aggregato $2^{\ae}$, & $4^{\ae}$, quæritur $2^a\ a$, ut priùs.

VEL SIC FACILIUS. Per 1^{am} metatheſim fit $+ a^3 + cca\ \Pi - ccd$. Ergo $+ \frac{a^3}{cc} + a\ \Pi - d$. Atqui $c. a. \frac{a^2}{c}. \frac{a^3}{cc} \div$ Ergo & cæt. ut priùs.

Patet hanc æquationem non differre ab ea quæ 1um propoſita eſt, niſi per mutationem ſignorum in locis per pares numeros deſignatis.

Eſto $3^o + a^3 - cca - ccd\ \Pi\ o$, ſive per metatheſim $+ a^3 - cca\ \Pi + ccd$. Ergo $+ cc. + aa - cc :: + a. + d$. Ideſt $\square\, 1^{\ae}. \square\, 2^{\ae} - \square\, 1^{\ae} :: 2^a. 4^a - 2^a$. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis $1^a\ c\ \Pi$ & differentiâ $2^{\ae}$ & $4^{\ae}$, nimirum d, quæritur $2^a\ a$.

VEL SIC. Per aliam metatheſim habetur $+ a^3 \sqcap + cca + ccd$. Ergo $+ cc . + aa :: + a . + a + d$. Ideſt $\square\, 1^x . \square\, 2^x :: 2^a . 4^a$. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a c ꟻ, & d differentiâ 2^x, & 4^x, quæritur 2^a a.

VEL SIC FACILIUS. Per 1^{am} metatheſim habetur $+ a^3 - cca \sqcap + ccd$. Ergo $\frac{+ a^3}{cc} - a \sqcap + d$. Atqui $c . a . \frac{a^2}{c} . \frac{a^3}{cc}$ ∺ ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a c ꟻ, & d differentiâ 2^x, & 4^x quæritur 2^a a.

VEL SIC. Per aliam metatheſim fit $- a^3 + cca \sqcap - ccd$. Ergo $- \frac{a^3}{cc} . + a \sqcap - d$. Atqui $c . a . \frac{a^2}{c} . \frac{a^3}{cc}$ ∺. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a, c ꟻ, & d differentiâ 2^x & 4^x, quæritur 2^a a.

VEL HOC MODO. Per ultimam metatheſim habetur $- a^3 + cca \sqcap - ccd$. Ergo $+ cc . + cc - aa :: + a . - d$. Ideſt $\square\, 1^x . \square\, 1^x - \square\, 2^x :: 2^a . 2^a - 4^a$. ſunt ergo hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a c ꟻ, & d differentiâ 2^x & 4^x, quæritur 2^a a ut priùs.

EXEMPLA IN NUMERIS.

1um.

Eſto $+ a^3 - 1a - 6 \sqcap o$. ſunt hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, nimirum 1 . 2 . 4 . 8 ∺, & fit 1^a $c \sqcap 1$; 2ª verò $a \sqcap 2$, at differentia 2^x, & 4^x nempe $6 \sqcap d$.

2um.

Eſto $+ a^3 - 64a - 192 \sqcap o$ eſt hîc intelligenda ſeries quatuor continuè proportionalium 8 . 4 . 2 . 1 ∺ & fit 1^a $c \sqcap 8$. 2ª verò $a \sqcap 4$, at differentiâ 2^x & 4^x nempe $3 \sqcap d$.

Eſto 4° $+ a^3 - cca + ccd \sqcap o$, ſivè per metatheſim

$+ a^3 - cca \,\Pi\, - ccd$. Ergo $+ cc . + aa - cc :: + a . - d$. Ideſt $\square 1^x . \square 2^x - \square 1^x :: 2^a . 4^a - 2^a$. eſt igitur hîc intelligenda ſeries quatuor continue proportionalium, & ex datis 1^a $c\sqcap$, & d differentiâ 2^x & 4^x, quæritur 2^a a.

VEL SIC. Per aliam metatheſim habetur $+ a^3 \,\Pi\, + cca - ccd$. Ergo $+ cc . + aa :: + a . + a - d$. Ideſt $\square 1^x . \square 2^x :: 2^a . 4^a$. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a $c\,\mathrm{F}$, & d differentiâ 2^x, & 4^x, quæritur 2^a nempe a.

Nec differt hæc æquatio ab ea, quæ tertio loco poſita eſt, niſi per ſignorum ſecundùm artem mutationem. Unde ſequitur quatuor præcedentes formulas ad duas reduci poſſe. Hinc

PROBLEMA I. VIETÆ.

In ſerie quatuor continuè proportionalium datis primâ, & ſummâ, vel differentiâ ſecundæ, & quartæ, ipſam ſecundam reperire.

Manifeſtum fit ex præmiſſis propoſitum problema difficultates omnes involvere, quæ in trimenſarum æquationum, 2do termino carentium ſolutionibus occurrere poſſunt.

ALITER.

Eſto 1° $+ a^3 + cca \,\Pi\, + ccd$. Ergo $+ c . + a :: + cc + aa . + cd$. Ideſt $1^a . 2^a :: \square 1^x + \square 2^x . + \sqsubset\!\sqsupset 1^x \times 2^{am} + \sqsubset\!\sqsupset 2^x \times 3^{am}$. vel per aliam interpretationem, ideſt $1^a . 3^a :: \square 1^x + \square 3^x . \square 2^x + \square 4^x$. Ergo 1° hîc eſt intelligenda ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1^a $c\,\mathrm{F}$ vel $\sqcap$, & d aggregato $\sqsubset\!\sqsupset 1^x \times 2^{am}$ & $\sqsubset\!\sqsupset 2^x \times 3^{am}$. Quæritur 2^a nempe a. Ergo 2° hîc eſt intelligenda ſeries quatuor continuè proportionalium. Atque ex datis 1^a $c\,\mathrm{F}$ vel $\sqcap$, & d aggregato $\square 2^x$ & $\square 4^x$, quæritur 3ª nempe a.

EXEMPLA IN NUMERIS.

1um.

Eſto $+ a^3 + 1 a - 10 \,\Pi\, o$. Hîc eſt intelligenda ſeries

trium continuè proportionalium, nempe 1 . 2 . 4 ∺, & fit 1^a c Π + 1; 2ª verò a Π + 2, at d Π (▭ $1^{æ} \times 2^{am}$ + ▭ $2^{æ} \times 3^{am}$ Π) 10.

2um.

Eſto + a^3 + 1 a — 68 Π o. Hîc ſunt quatuor continuè proportionales intelligendæ, nimirum 1 . 2 . 4 . 8 ∺. Et fit 1^a c Π + 1, 2ª verò a Π + 4, at d Π (□ $2^{æ}$ + □ $4^{æ}$ Π) 68.

Eſto 2° + a^3 + cca Π — ccd. Ergo + c . + a :: + cc + aa . — cd. Ideſt 1^a . 2^a :: □ $1^{æ}$ + □ $2^{æ}$. ▭ $1^{æ} \times 2^{am}$ + ▭ $2^{æ} \times 3^{am}$. Vel per aliam interpretationem ideſt 1^a . 3^a :: □ $1^{æ}$ + □ $3^{æ}$. □ $2^{æ}$ + □ $4^{æ}$. Ergo 1° hîc eſt intelligenda ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1^a c ⊏ vel ⊓, atque cd Π ▭ $1^{æ} \times 2^{am}$ + ▭ $2^{æ} \times 3^{am}$, quæritur 2^a a. Ergo 2° hîc intelligendæ ſunt quatuor continuè proportionales, Atque ex datis 1^a c ⊏ vel ⊓, & cd Π + □ $2^{æ}$ + □ $4^{æ}$, quæritur 3^a nempe a.

Eſto 3° + a^3 — cca Π + ccd. Ergo + c . + a :: + aa — cc . + cd. Ideſt 1^a . 2^a :: □ $2^{æ}$ — □ $1^{æ}$. + ▭ $2^{æ} \times 3^{am}$ — ▭ $1^{æ} \times 2^{am}$. Vel per aliam interpretationem ideſt 1^a . 3^a :: □ $3^{æ}$ — □ $1^{æ}$. □ $4^{æ}$ — □ $2^{æ}$. Quare 1° hîc eſt intelligenda ſeries trium continuè proportionalium; Atque ex datis 1^a c ⊓, & cd differentiâ ▭ $1^{æ} \times 2^{am}$ & ▭ $2^{æ} \times 3^{am}$ quæritur 2^a nempe a. Ergo 2° hîc intelligendæ ſunt quatuor continuè proportionales; Atque ex datis 1^a c ⊓, & differentiâ □ $2^{æ}$, & □ $4^{æ}$ nimirum cd, quæritur 3ª nempe a.

EXEMPLA IN NUMERIS.

1° eſto + a^3 — 1 a — 6 Π o. Hîc intelligendæ ſunt tres continuè proportionales, videlicet 1 . 2 . 4 ∺. & fit 1^a c Π + 1, 2ª verò a Π + 2, At d Π (+ ▭ $2^{æ} \times 3^{am}$ — ▭ $1^{æ} \times 2^{am}$ Π) 6.

2° eſto + a^3 — 1 a — 60 Π o. Hîc intelligendæ ſunt quatuor continuè proportionales nimirum 1 . 2 . 4 . 8 ∺,

& fit 1^a $c \sqcap + 1$, 3ª verò $a \sqcap + 4$, at $d \sqcap (\square\, 4^{\ae} - \square\, 2^{\ae} \sqcap)$ 60.

Eſto 4° $+ a^3 - cca \sqcap - ccd$. Ergo $+ c . + a :: + aa - cc . - cd$. Ideſt $1^a . 2^a :: \square\, 2^{\ae} - \square\, 1^{\ae} . +$ ▭ $2^{\ae} \times 3^{am} -$ ▭ $1^{\ae} \times 2^{am}$. Vel per aliam interpretationem $1^a . 3^a :: \square\, 3^{\ae} - \square\, 1^{\ae} . \square\, 4^{\ae} - \square\, 2^{\ae}$. Ergo 1° hîc intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1^a $c\,\eta$, & differentiâ ▭ $1^{\ae} \times 2^{am}$, & ▭ $2^{\ae} \times 3^{am}$ nimirum d, quæritur 2^a nempe a. Ergo 2° hîc intelligendæ ſunt quatuor continuè proportionales, & ex datis 1^a $c\,\eta$, & differentiâ $\square\, 2^{\ae}$ & $\square\, 4^{\ae}$ nimirum cd, quæritur 3^a, nempe a ut priùs. Hinc duo emanant problemata videlicet.

PROBLEMA II.

In ſerie trium continuè proportionalium datis primâ, & aggregato, vel differentiâ bimenſi primæ in ſecundam, & bimenſi ſecundæ in tertiam, ipſam ſecundam reperire.

PROBLEMA III.

In ſerie quatuor continuè proportionalium datis primâ, & aggregato, vel differentiâ æquibimenſorum ſecundæ, & quartæ, ipſam tertiam reperire.

ADHUC ALITER.

Eſto 1° $+ a^3 + cca - ccd \sqcap o$. ſupponatur $ay \sqcap cd$. Ergo $+ a^3 + cca - cya \sqcap o$. Ideſt $+ a^2 + cc - cy \sqcap o$, vel $+ aa \sqcap - cc + cy$. Ergo $+ c . + a . - c + y$ ∺. Hîc igitur intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1^a $c\,F$, vel η, & $cd \sqcap$ ▭ ſub media a, & extremarum ſumma y, quæritur media a, & altera extrema $+ y - c$.

Eſto 2° $+ a^3 + cca + ccd \sqcap o$. Poſito ut priùs $cd \sqcap ay$ fit $+ a^3 + c^2 a + cya \sqcap o$, ideſt $+ aa + cc + cy \sqcap o$,

$\Pi\, o$, vel per metatheſim $+\, aa\, \Pi - cc - cy$. Ergo $+\, c. + a. - c - y \div\div$. Hîc igitur intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1ª c F vel Π, & $cd\, \Pi$ ▭ ſub media a, & extremarum ſumma y, quæritur media a, & altera extrema $- c - y$.

Eſto 3° $+\, a^3 - cca - ccd\, \Pi\, o$. Poſito ut priùs $cd\, \Pi\, ay$ fit $+\, a^3 - cca - cya\, \Pi\, o$, ideſt $+\, aa - cc - cy\, \Pi\, o$, vel per metatheſim $+\, aa\, \Pi + cc + cy$. Ergo $+\, c. + a. + c + y \div\div$. Hîc igitur intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1ª $c\, \Pi$, & $cd\, \Pi$ ▭ ſub media a, & extremarum differentia y, quæritur media a, & altera extrema $+\, c + y$.

Eſto 4° $+\, a^3 - cca + ccd\, \Pi\, o$. Poſito ut priùs $cd\, \Pi\, ay$ fit $+\, a^3 - cca + cay\, \Pi\, o$, ideſt $+\, aa - cc + cy\, \Pi\, o$, vel per metatheſim $+\, aa\, \Pi + cc - cy$. Ergo $+\, c. + a. + c - y \div\div$. Hîc igitur intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1ª c F, & $cd\, \Pi$ ▭ ſub media a, & extremarum differentia y, quæritur media a, & altera extrema $+\, c - y$. Quod adhuc clariùs ex talium æquationum geneſi apparebit.

GENESIS PRÆCEDENTIUM ÆQUATIONUM.

Eſto ſeries trium continuè proportionalium verbi gratia.

1ª	media	3ª
$c.$	$a.$	$\frac{aa}{c}$

Fiat 1° $\left(c + \frac{aa}{c} \times a\, \Pi\right) ca + \frac{a^3}{c}\, \Pi\, cd$.

Ergo $+\, a^3 + cca - ccd\, \Pi\, o$.

Aa

Fiat 2° $\left(c + \frac{aa}{c} \times a\,\Pi\right)$ $ca + \frac{a^3}{c}\,\Pi - cd.$

Ergo $+ a^3 + cca + ccd\,\Pi\, o.$

Fiat 3° $\left(-c + \frac{a^2}{c} \times a\,\Pi\right)$ $- ca + \frac{a^3}{c}\,\Pi + cd.$

Ergo $+ a^3 - cca - ccd\,\Pi\, o.$

Fiat 4° $\left(+c - \frac{aa}{c} \times a\,\Pi\right)$ $+ ca - \frac{a^3}{c}\,\Pi + cd.$

Ergo $+ a^3 - cca + ccd\,\Pi\, o.$ Hinc ſequitur.

PROBLEMA IV.

In ſerie trium continuè proportionalium datis primâ, atque bimenſo ſub media, & extremarum ſumma, vel differentia, mediam, & alteram extremam reperire.

INVESTIGATIO II.

Per reſolutionem æqualitatis in proportionem pro trimenſis æquationibus, tertio termino carentibus.

Illæ omnes ad quatuor ſequentes formulas reducuntur.

$$+ a^3 + ca^2 - ccd\,\Pi\, o.$$
$$+ a^3 + ca^2 + ccd\,\Pi\, o.$$
$$+ a^3 - ca^2 - ccd\,\Pi\, o.$$
$$+ a^3 - ca^2 + ccd\,\Pi\, o.$$

Eſto 1° $+ a^3 + ca^2 - ccd\,\Pi\, o$, vel per metatheſim $+ a^3 + ca^2\,\Pi + ccd.$ Ergo $+ cc. + aa :: + c + a. + d.$ Ideſt $\square\, 1^x.\ \square\, 2^x :: 1^a + 2^a.\ 3^a + 4^a.$ Hîc igitur intelligenda eſt ſeries quatuor continuè proportionalium, & ex datis primâ c F, vel ∏, & d aggregato 3^x, & 4^x, quæritur 2^a a.

Vel ſic faciliùs $+ a^3 + ca^2\,\Pi + ccd.$ Ergo $+ \frac{a^3}{cc} + \frac{a^2}{c}\,\Pi + d.$ Atqui $c.\ a.\ \frac{a^2}{c}.\ \frac{a^3}{cc}$ ∺.

Ergo hîc ut priùs intelligenda eſt ſeries quatuor continuè proportionalium, & ex datis 1^a c F vel ∏, & d aggregato 3^x & 4^x, quæritur 2^a a.

Vel ſecundum hanc interpretationem $+ a^3 + ca^2 \Pi + ccd$. Ergo $+ c . + c + a :: + aa . + cd$. Ideſt $1^a . 1^a + 3^a :: \square 3^x . \square 3^x + \square 4^x$. Hîc igitur intelligenda eſt ſeries quatuor continuè proportionalium, & ex datis 1^a c F, vel η, & cd aggregato $\square^{orum}$ 3^x, & 4^x, quæritur 3^a a.

Vel per aliam metatheſim fit $+ a^3 \Pi - ca^2 + ccd$. Ergo $+ c . + a :: + aa . - aa + cd$. Ideſt $1^a . 2^a :: \square 2^x$. ▭ ſub 2^a & 3^a. Quare hîc intelligendæ ſunt tres continuè proportionales, & ex datis 1^a c F, vel η, & cd aggregato $\square 2^x$, & ▭ ſub 2^a, & 3^a, quæritur 2^a a.

EXEMPLA IN NUMERIS.

Eſto $1^o + a^3 + 1a^2 - 12 \Pi o$. Hîc intelligendæ ſunt quatuor continuè proportionales nimirum $1 . 2 . 4 . 8$ ∺, & fit 1^a $c \Pi + 1$, 2ª verò $a \Pi + 2$, at $d \Pi$ $(3^x + 4^a \Pi)$ 12.

Eſto $2^o + a^3 + 8a^2 - 192 \Pi o$. Hîc pariter intelligendæ ſunt quatuor continuè proportionales nimirum $8 . 4 . 2 . 1$ ∺, & fit 1^a $c \Pi + 8$, 2ª verò $a \Pi + 4$. at $d \Pi$ $(3^x + 4^a \Pi)$ 3.

Eſto $3^o + a^3 + 1aa - 80 \Pi o$. Hîc rurſus intelligendæ ſunt quatuor continuè proportionales, nimirum $1 . 2 . 4 . 8$ ∺, & fit 1^a $c \Pi + 1$, 3ª verò $a \Pi + 4$, at $cd \Pi$ $(\square 3^x + \square 4^x \Pi)$ 80.

Eſto $4^o + a^3 + 4aa - 24 \Pi o$. Hîc intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, nimirum $4 . 2 . 1$ ∺, & fit 1^a $c \Pi + 4$, 2ª verò $a \Pi + 2$, at $cd \Pi$ ($\square 2^x +$ ▭ $2^x \times 3^{am} \Pi$) 6.

Eſto $2^o + a^3 + ca^2 + ccd \Pi o$, vel per metatheſim $+ a^3 + ca^2 \Pi - ccd$. Ergo $+ cc . + aa :: + c + a . - d$. Ideſt $\square 1^x . \square 2^x :: 1^a + 2^a . 3^a + 4^a$.

Vel ſecundum hanc interpretationem $+ a^3 + ca^2 \Pi - ccd$. Ergo $+ c . + c + a :: + aa . - cd$. Ideſt $1^a . + 3^a :: \square 3^x . \square 3^x + \square 4^x$. Vel per aliam metatheſim $+ a^3 \Pi - ca^2 - ccd$. Ergo $+ c . + a :: + aa . - a^2 - cd$. Ideſt $1^a . 2^a :: \square 2^x$. ▭ ſub 2^a & 3^a.

Nec differt hæc æquatio, quantum ad hunc reſolvendi modum attinet, ab ea quæ primo loco poſita eſt, niſi quod in ſuperiori quantitas d, vel cd affirmatur, hîc verò negatur.

Eſto 3° $+a^3 - ca^2 - ccd \,\Pi\, o$, ſive per metatheſim $+a^3 - ca^2 \,\Pi\, +ccd$, ergo $+cc. +aa :: +a-c. +d$. Ideſt $\square\, 1^{\ae}. \square\, 2^{\ae} :: 2^a - 1^a. 4^a - 3^a$. Hîc igitur intelligenda eſt ſeries quatuor continuè proportionalium, & ex datis 1^a c ⅂, & d differentiâ $3^{\ae}$, & $4^{\ae}$, quæritur 2^a a.

Vel ſic faciliùs $+a^3 - ca^2 \,\Pi\, +ccd$ ergo $+\frac{a^3}{cc} - \frac{aa}{c} \,\Pi\, d$. Atqui $c. a. \frac{a^2}{c}. \frac{a^3}{cc}$ ∺. Ergo hîc ut priùs intelligenda eſt ſeries quatuor continuè proportionalium, & ex datis 1^a c ⅂, & differentiâ $3^{\ae}$, & $4^{\ae}$, nempe d, quæritur 2^a a.

Vel ſecundum hanc interpretationem. $+a^3 - ca^2 \,\Pi\, +ccd$. Ergo $+c. +a-c :: +aa. +cd$. Ideſt $1^a. 3^a - 1^a :: \square\, 3^{\ae}. \square\, 4^{\ae} - \square\, 3^{\ae}$. Hîc iterum intelligenda eſt ſeries quatuor continuè proportionalium, & ex datis 1^a c ⅂, & cd differentiâ $\square$ orum $3^{\ae}$, & $4^{\ae}$, quæritur 3^a a.

Vel per aliam metatheſim $+a^3 \,\Pi\, +ca^2 + ccd$. Ergo $+c. +a :: +aa. +aa+cd$. Ideſt $1^a. 2^a :: \square\, 2^{\ae}. \sqsubset\!\sqsupset$ ſub 2^a, & 3^a. Hîc igitur intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1^a c ⅂, & cd differentiâ $\square\, 2^{\ae}$, & $\sqsubset\!\sqsupset$ ſub 2^a, & 3^a, quæritur 2^a a.

Exempla in Numeris.

Eſto 1° $+a^3 - 1aa - 4 \,\Pi\, o$. Hîc intelligenda eſt ſeries quatuor continuè proportionalium nimirum $1. 2. 4. 8$ ∺, & fit 1^a $c \,\Pi\, +1$, 2ª verò $a \,\Pi\, +2$, at $d \,\Pi\, (4^{\ae} - 3^a \,\Pi\,)\ 4$.

Eſto 2° $+a^3 - 1a^2 - 48 \,\Pi\, o$. Hîc iterum intelligenda eſt ſeries quatuor continuè proportionalium nimirum $1. 2. 4. 8$ ∺, & fit 1^a $a \,\Pi\, +1$, 3ª verò $a \,\Pi\, +4$, at $cd \,\Pi\, (\square\, 4^{\ae} - \square\, 3^{\ae} \,\Pi\,)\ 48$.

Eſto $3^a + a^3 - 1a^2 - 18 \,\Pi\, o$. Hîc intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium nimirum $1 . 3 . 9 \div$, & fit $1^a \; c \,\Pi + 1$, 2ª verò $a \,\Pi + 3$, at $cd \,\Pi$ ($\sqsubset\!\sqsupset$ ſub 3^a, & $4^a - \square\, 2^x \,\Pi$) 18.

Eſto $4^o + a^3 - ca^2 + c^2 d \,\Pi\, o$, vel per metatheſim $+ a^3 - ca^2 \,\Pi - ccd$. Ergo $1^o + cc . + aa :: + a - c . - d$, ergo $2^o + c . + a - c :: + aa - cd$. Ideſt $1^o \; \square\, 1^x . \square\, 2^x :: 2^a - 1^a . 4^a - 3^a$. Ideſt $2^o \; 1^a . 3^a - 1^a :: \square\, 3^x . \square\, 4^x - \square\, 3^x$. ſed cum hæc æquatio, quantum ad hunc reſolvendi modum attinet, non differat ab ea quæ 3° loco poſita eſt, niſi quod in illa quantitas d, vel cd affirmata, hîc tranſit in negatam, ſupervacuneum foret illam ulteriùs examinare. Hinc tria emanant problemata.

PROBLEMA V.

In ſerie quatuor continuè proportionalium, datis primâ, & aggregato, vel differentiâ tertiæ, & quartæ, ipſam ſecundam reperire.

PROBLEMA VI.

In ſerie quatuor continuè proportionalium, datis primâ, & aggregato, vel differentiâ æquibimenſi tertiæ, & æquibimenſi quartæ, ipſam tertiam reperire.

PROBLEMA VII.

In ſerie trium continuè proportionalium datis primâ, & aggregato, vel differentia æquibimenſi ſecundæ, & bimenſi ſecundæ in tertiam, ipſam ſecundam reperire.

ADHUC ALITER EX VIETA.

Eſto $1^o + a^3 + ca^2 - cdd \,\Pi\, o$, vel per metatheſim $+ a^3 + ca^2 \,\Pi + cdd$. Ergo $+ c . + \frac{cd}{a} . + c + a \div$, & in hac trium continuè proportionalium ſerie fit $1^a \; c \,\Pi$, 2^a

verò $\frac{cd}{a}$, at a differentia inter 1^{am}, & 3^{am}. Atqui $+c.$ $+\frac{cd}{a} :: +a. +d.$ Ideſt $1^a . 2^a :: +3^a - 1^a . +4^a - 2^a$. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a c Π, & d differentia 2^x, & 4^x, quæritur a differentia 1^x, & 3^x.

Eſto 2° $+a^3 + ca^2 + cdd \,\Pi\, o$, ſive per metatheſim $-a^3 - ca^2 \,\Pi + cdd$. Ergo $+c. + \frac{cd}{a}. -a - c \div\div$, & in hac trium continuè proportionalium ſerie fit 1^a c, 2ª verò $\frac{cd}{a}$, at a ſumma 1^x & 3^x. Atqui $+c. + \frac{cd}{a} :: +a. +d.$ Ideſt $1^a . 2^a :: 1^a + 3^a . 2^a + 4^a$. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a c Π, vel Π, & d aggregato ſecundæ & 4^x, quæritur a aggregatum 1^x, & 3^x.

Eſto 3° $+a^3 - ca^2 - cdd \,\Pi\, o$, ſive per metatheſim $+a^3 - ca^2 \,\Pi + cdd$. Ergo $+c. + \frac{cd}{a}. +a - c \div\div$, & in hac trium continuè proportionalium ſerie fit 1^a c, 2ª verò $\frac{cd}{a}$, at a ſumma 1^x & 3^x. Atqui $+c. + \frac{cd}{a} :: +a. + d.$ Ideſt $1^a . 2^a :: 1^a + 3^a . 2^a + 4^a$. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a c Π vel Π, & d aggregato 1^x, & tertiæ, quæritur a aggregatum 2^x & 4^x ut priùs. Nec mirum quoniam hujus æquationis conſtitutio non differt à priori, niſi per artificioſam ſignorum mutationem.

Eſto 4° $+a^3 - ca^2 + cdd \,\Pi\, o$, ſive per metatheſim $-a^3 + ca^2 \,\Pi + cdd$. Ergo $+c. + \frac{cd}{a}. + c - a \div\div$, & in hac trium continuè proportionalium ſerie fit 1^a c,

2ª verò $\frac{cd}{a}$, at a differentia $1^{\ae}$, & $3^{\ae}$. Atqui $+c.+\frac{cd}{a}$ $::+a+d$. Ideſt $1^a.2^a::1^a-3^a.2^a-4^a$. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a c ƞ, & d differentia $2^{\ae}$, & $4^{\ae}$, quæritur a differentia $1^{\ae}$, & $3^{\ae}$, nec differt hæc æquatio ab ea quæ primò loco poſita eſt niſi per artificioſam ſignorum mutationem. Itaque

PROBLEMA VIII^um. EX VIETA.

In ſeriæ quatuor continuè proportionalium, datis primâ, & ſummâ, vel differentiâ ſecundæ & quartæ, invenire ſummam, vel differentiam primæ, & tertiæ.

ADHUC ALITER.

Eſto 1° $+a^3+ca^2-ccd \,\Pi\, o$. Supponatur $cd \,\Pi\, ay$. Fit $+a^3+ca^2-cya \,\Pi\, o$, ideſt $+aa+ca-cy \,\Pi\, o$, ſivè per metatheſim $+aa \,\Pi\, -ca+cy$. Ergo $+c.+a.-a+y \,\Pi\, o$. Quare hîc intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1^a F vel ƞ & $cd \,\Pi$ ▭ ſub media a, & ſub y aggregato mediæ, & alteriùs extremæ, nempe ay, quæritur mediæ a, & altera extrema $-a+y$.

Eſto 2° $+a^3+ca^2+ccd \,\Pi\, o$. Poſito ut priùs $cd \,\Pi\, ay$ fit $+a^3+ca2+cya \,\Pi\, o$, vel $+aa.+ca+cy \,\Pi\, o$, ſive per metatheſim $+aa \,\Pi\, -ca-cy$ Ergo $+c.+a.-a-y$ ∵. Hîc igitur intelligenda eſt ſeries trium connuè proportionalium, & ex datis 1^a F vel ƞ nempe c, & $cd \,\Pi$ ▭ ſub media a, & ſub y aggregato mediæ, & alteriùs extremæ nempe ay quæritur media a, & altera extrema $-a-y$, ut priùs

---

Eſto 3° $+a^3-ca^2-ccd \,\Pi\, o$. Poſito ut ante $cd \,\Pi\, ay$ fit $+a^3-ca^2-cya \,\Pi\, o$, vel $+aa-ca-cy \,\Pi\, o$, ſive

per metatheſim $+ aa \sqcap + ca + cy$. Ergo $+ c. + a. + c + y$ ÷÷. Hîc iterum intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1ª $c \sqcap$, & $cd \sqcap$ ▭ ſub media a, & extremarum differentia, nempe ay, quæritur media a, & altera extrema $+ a + y$.

Eſto 4° $+ a^3 - ca^2 + ccd \sqcap o$. Poſito ut ante $cd \sqcap ay$, fit $+ a^3 - ca^2 + cya \sqcap o$, vel $+ aa - ca + cy \sqcap o$, ſive per metatheſim $+ a^2 \sqcap + ca - cy$, ergo $+ c. + a. + a - y$ ÷÷, atque hîc rurſus intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1ª $c \sqcap$, & $cd \sqcap$ ▭ ſub media a, & extremarum differentia y, nempe ay, quæritur media a, & altera extrema $+ a - y$. Quod adhuc clariùs ex talium æquationum geneſi apparebit.

GENESIS PRÆCEDENTIUM ÆQUATIONUM.

Eſto ſeries trium continuè proportionalium, verbi gratiâ,

1ª.	media	3ª.
c.	a.	$\frac{aa}{a}$

Fiat 1° $\left(+ a + \frac{aa}{c} \times a \sqcap \right) + a^2 + \frac{a^3}{c} \sqcap cd$.

Ergo $+ a^3 + ca^2 - ccd \sqcap o$.

Fiat 2° $\left(a + \frac{a^2}{c} \times a \sqcap \right) + \frac{a^3}{c} + a^2 \sqcap - cd$.

Ergo $+ a^3 + ca^2 + ccd \sqcap o$.

Fiat 3° $\left(- a + \frac{a^2}{c} \times a \sqcap \right) - aa + \frac{a^3}{c} \sqcap + cd$.

Ergo $+ a^3 - ca^2 - ccd \sqcap o$.

Fiat 4° $\left(+ a - \frac{a^2}{c} \times a \sqcap \right) + a^2 - a^3 \sqcap + cd$.

Ergo $+ a^3 - ca^2 + ccd \sqcap o$. Itaque

PROBLEMA

PROBLEMA IX.

In ſerie trium continuè proportionalium datis primâ, & bimenſo ſub media, & aggregato, vel differentiâ mediæ, & alterius extremæ, ipſam mediam, & alteram extremam reperire.

SCHOLIUM.

Hæc propterea exequutus ſum pluribus, quod illa æquationum in proportiones reſolutio non modicam utilitatem per ſe ferens, amplam pulcherrimis ſpeculationibus materiam ſuppeditet. Neque enim in bimenſis, aut trimenſis æquationibus tantùm, ut jam oſtenſum eſt, vim ſuam exercet, verùm etiam in altioribus quibuſlibet æquationibus, tribus ſolummodò terminis, 1° videlicet, ultimo, & aliquo mediorum conſtantibus, locum habet, in quibus ſimilia prorſus quàm hîc oſtenſa ſunt, & per eaſdem argumentationes concludere licet. Quin imò ejuſdem artis reſolutoriæ operâ earum omnium æquationum ſive defectivarum, ſive completarum, & ad quemcumque gradum aſcendentium natura, atque conſtitutio agnoſci poteſt, in quibus intermediorum terminorum coëfficientes talem inter ſe relationem habent ut ſecundi, ſive primi intermedii termini coëfficiens cæterorum coëfficientium radix exiſtens, ipſos omnes per iteratam ſui multiplicationem ſucceſſivè producat, hoc eſt ut tertii termini coëfficiens æquibimenſum ſit coëfficientis ſecundi, quarti verò coëfficiens æquitrimenſum ſit ejuſdem coëfficientis ſecundi, & ſic de cæteris; ſervato ſemper hoc ordine in defectivis æquationibus nihilo ſecius ac ſi omnes termini adeſſent. Nam in hujuſmodi æquationibus intelligenda erit aliquot continuè proportionalium ſeries; & ex datis 1ª, videlicet coëfficiente ſecundi termini, & aggregato vel differentiâ aliquarum mediarum proportionalium, vel certarum poteſtatum ab ipſis, quæretur ignota propoſitæ æquationis quantitas, quæ erit aliqua, vel aliquarum ſumma vel differentia ex mediis proportionalibus, in intelligenda ſerie conſtitu-

tis. Quæ cùm omnia per ſe plana ſint, & ex prævia de bimenſis & trimenſis æquationibus in proportionem reſolvendis doctrina ſponte ſuâ ſequantur, prolixiori non egent explicatione.

Sed, quod valdè notatu dignum eſt, ex inventis problematibus apparet incognitam propoſitarum æquationum quantitatem, quamvis invariata maneat, diverſas tamen ſortiri denominationes, verbi gratiâ, eſto $+ a^3 + caa - ccd$ Π o, vel $+ a^3 + caa - cdd$ Π o.

1°, Per 5um Problema hîc eſt intelligenda ſeries quatuor continuè proportionalium, ubi 1^a F, vel ŋ eſt c; 2ª verò a, at d aggregatum tertiæ & quartæ.

2°, Per 6um Problema hîc intelligenda eſt ſeries quatuor continuè proportionalium, ubi 1^a F, vel ŋ eſt c, 3ª verò a, at cd aggregatum □^{orum} 3^x & 4^x.

3°, Per 8um Problema hîc adhuc intelligenda eſt ſeries quatuor continuè proportionalium, ubi 1^a ŋ eſt c, differentia verò 1^x & 3^x eſt a, at d differentia 2^x & 4^x, & ſic de cæteris.

EXEMPLA IN NUMERIS.

Eſto ſeries quatuor continuè proportionalium 1. 2. 4. 8 ∺, & ponatur a pro incognita quantitate.

$$\begin{array}{l} \qquad\quad +c \quad -ccd \end{array}$$

Per 5um Problema fit $+ a^3 + 1 a^2 - 12$ Π o, eſtque a Π 2^x nempe $+ 2$.

$$\begin{array}{l} \qquad\quad +c \quad -ccd \end{array}$$

Per 6um Problema fit $+ a^3 + 1 a^2 - 80$ Π o, eſtque a Π 3^x, nempe $+ 4$.

$$\begin{array}{l} \qquad\quad +c \quad -cdd \end{array}$$

Per 8um Problema fit $+ a^3 + 1 a^2 - 36$ Π o, eſtque a Π $3^x - 1^a$, nempe $+ 3$; c verò Π 1^x, nempe $+ 1$, at d Π $4^x - 2^a$ nempe $+ 6$.

Jam ut in eadem æquatione differentes illæ ejuſdem ignotæ quantitatis denominationes conſpiciantur.

Sumamus 1° $+ a^3 + 1 a^2 - 12 \sqcap o$, ubi eſt ſeries quatuor continuè proportionalium, nimirum 1. 2. 4. 8 $\div$, & fit $a \sqcap 2^{e}$ nempe 2.

Per 6um Problema fit $a \sqcap (+2 \sqcap) 3^{e}$, ergo $\sqrt{2}$ $\sqcap 2^{x}$, & ſic erit ſequens ſeries 1. $\sqrt{2}$. 2. $2\sqrt{2}$ $\div$.

Per 8um Problema fit $a \sqcap (+ 2 \sqcap) 3^{x} - 1^{a}$, ergo 3^{a} eſt $\underline{3}$ (nam $\underline{3} - 1 \sqcap 2$). Quare erit hæc ſeries 1. $\sqrt{3}$. 3. $3\sqrt{3}$ $\div$.

Sumamus 2°. $+ a^3 + 1 a^2 - 80 \sqcap o$, ubi eſt ſeries quatuor continuè proportionalium, nimirum 1. 2. 4. 8 $\div$, & fit $a \sqcap + 4$ per 6um Problema.

Per 5um Problema fit $+ a \sqcap (+ 4 \sqcap) 2^{x}$. Quare erit hæc ſeries 1. 4. 16. 64 $\div$

Per 8um Problema fit $+ a \sqcap (+ 4 \sqcap) 3^{x} - 1^{a}$, ergo 3^{a} $\sqcap + \underline{5}$ (nam $5 - 1 \sqcap 4$), & ſic habetur ſequens ſeries 1. $\sqrt{5}$. 5. $5\sqrt{5}$ $\div$

Sumamus 3° $+ a^3 + 1 aa - 36 \sqcap o$, ubi eadem eſt ſeries quatuor continuè proportionalium, nimirum 1. 2. 4. 8 $\div$, & fit $a \sqcap 3$, per 8um Problema.

Per 5um Problema fit $a \sqcap (+ 3 \sqcap) 2^{x}$. Ergo erit hæc ſeries 1. 3. 9. 27 $\div$

Per 6um Problema fit $a \sqcap (+ 3 \sqcap) 3^{x}$. Ergo $2^{a} \sqcap \sqrt{3}$ & ſic erit hæc ſeries 1. $\sqrt{3}$. 3. $3\sqrt{3}$ $\div$

In his omnibus proportionalium ſeriebus pro qualibet æquatione acceptis, ultimus terminus idem manens diverſas etiam denominationes accipit, & à diverſis quantitatibus producitur, ut manifeſtum eſt ex jam explicata propoſitarum æquationum natura.

INVESTIGATIO III.

Pro ſolutione trimenſarum æquationum ſecundo termino carentium, per novam geneſim, atque conſtitutionem.

Eſto $+ mmn \sqcap + y^3$. Ergo $m. y. \frac{mn}{y} \div$, & fit $mn \sqcap$ ▭ ſub 2^{a}, & 3^{a}.

Ponatur 1° $+ a \sqcap 2^{x} + 3^{a}$. Ergo $+ \frac{1}{2} a \pm$

$\sqrt{\frac{1}{4}aa - mn}\ \Pi\ \frac{2^2}{3^2}$. Ergo $+m. + \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - mn}. + \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - mn}$ ÷ (quando videlicet $m \sqsubset y$; ſed in inventa trium continuè proportionalium ſerie perinde eſt ſive ponas $m \sqcap$ vel $\sqsubset y$, ideſt ſive ponas $+\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - mn}$ pro 2^2, aut 3^2, nam eadem ſemper proveniet æquatio) Ergo etiam $+\frac{1}{2}ma - m\sqrt{\frac{1}{4}aa - mn}\ \Pi + \frac{1}{2}aa - mn + a\sqrt{\frac{1}{4}aa - mn}$, ſive per metatheſim $\frac{a}{m}\sqrt{\frac{1}{4}aa - mn}\ \Pi - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}ma + mn$, & utramque partem in ſe ducendo fit $+\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}ma^3$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{1}{4}m^2 \\ -mn \end{array}\right\} a^2 - 2m^2na - m^3n\ \Pi + \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{2}ma^3$$

$$\left.\begin{array}{l} -mn \\ +\frac{1}{4}m^2 \end{array}\right\} a^2 + m^2na + m^2n^2,$$ & ordinata æquatione habetur $+a^3 - 3mna - m^2n \atop \quad\quad\quad\quad\quad - mn^2$ $\Pi\ 0$.

Jam proponatur $+a^3 - qa - r\ \Pi\ 0$. Ergo $+q\ \Pi + 3mn$, ſivè $+\frac{1}{3}q\ \Pi + mn$, atque $+r\ \Pi + m^2n + mn^2$, vel mutando mn in ſuum valorem $\frac{1}{3}q$ habetur $+r\ \Pi + \frac{1}{3}qm + \frac{1}{3}qn$, ergo $+\frac{3r}{q}\ \Pi + m + n$. Igitur $+\frac{3r}{2q} \pm \sqrt{+\frac{9rr}{4qq} - \frac{1}{3}q}\ \Pi\ {m \atop n}$, quod ductum in $(mn\ \Pi)\ \frac{1}{3}q$ oritur $+\frac{1}{2}r + \sqrt{+\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$

$\Pi + y^3$ quando m F n, & conſequenter

$$\cfrac{+\sqrt[3]{+\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}rr-\frac{1}{27}q^3}} \quad + \frac{1}{3}q}{+\sqrt[3]{+\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}rr-\frac{1}{27}q^3}}} \quad \Pi + a.$$

Ponatur $2^0 + e \,\Pi\, 2^x - 3^x$. Ergo $\pm \frac{1}{2}e + \sqrt{+\frac{1}{4}e^2 + mn} \;\Pi\; \frac{2^x}{3^x}$. Ergo $+ m. + \frac{1}{2}e + \sqrt{\frac{1}{4}ee + mn}\;.\; - \frac{1}{2}e + \sqrt{\frac{1}{4}e^2 + mn} \;\div\!\!\div$ Igitur $-\frac{1}{2}me + m\sqrt{\frac{1}{4}e^2 + mn} \;\Pi + \frac{1}{2}e^2 + mn + e\sqrt{\frac{1}{4}e^2 + mn}$ ſivè per metatheſim

$$\begin{matrix}-e\\+m\end{matrix}\sqrt{\frac{1}{4}e^2 + mn} \;\Pi + \frac{1}{2}ee + \frac{1}{2}me + mn,$$

& utramque partem in ſe ducendo habetur

$$\left.\begin{matrix}+\frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{2}me^3 + \frac{1}{4}m^2\\ + mn\end{matrix}\right\} e^2 - 2mne + m^3 n \;\Pi$$

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{2}me^3 + mn\\ + \frac{1}{4}m^2\end{matrix}\right\} \begin{matrix}e^2 + m^2 ne\\ + m^2 n^2\end{matrix}$$

& ordinatâ æquatione habetur $+ e^3 + 3mne \begin{matrix}- m^2 n\\ + mn^2\end{matrix} \;\Pi\; o.$

Jam proponatur $+ e^3 + qe - r \,\Pi\, o$. Ergo $q \,\Pi\, 3mn$, ſivè $\frac{1}{3}q \,\Pi\, mn$, & $-r \,\Pi - m^2 n + mn^2$, vel $+ r \,\Pi + m^2 n - mn^2$, ſive mutando mn in ſuum valorem $\frac{1}{3}q$ ha-

betur $+r \,\Pi\, + \frac{1}{3}\, qm - \frac{1}{3}\, qn$, ideſt $+\frac{3r}{q}\, \Pi\, + m -$ n. Ergo $+\frac{3r}{2q} + \sqrt{\frac{9rr}{4qq} + \frac{1}{3}q}\;\Big| \;\Pi\, + m$, quâ æquatione ductâ in $(mn \,\Pi)\; \frac{1}{3}q$ habetur $+\frac{1}{2}\, r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}\;\Big|$ $\Pi\, + y^3$, & conſequenter $+\sqrt[3]{+\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}}\;\Big|\Big|$

$$\frac{-\frac{1}{3}q}{+\sqrt[3]{+\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}.}\;\Big|\Big|} \quad \Pi\, + a.$$

EXEMPLA IN NUMERIS.

Eſto 1° $+a^3 - 1a - 6 \,\Pi\, o$. Hîc $+a \,\Pi\, + 2$; $+q \,\Pi$
$-q \quad -r$
$+1$, & $+r \,\Pi\, + 6$. Quare juxta regulam fit $+$

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt{9 - \frac{1}{27}}}\;\Big|\Big| \quad + \frac{\frac{1}{3}}{+\sqrt[3]{+3 + \sqrt{+9 - \frac{1}{27}}}\;\Big|\Big|} \quad \Pi\, (+a \,\Pi)\, + 2$$

OSTENSIO.

Brevitatis cauſâ ponatur $+m \,\Pi\, +$ $\sqrt[3]{+3 + \sqrt{+9 - \frac{1}{27}}}\;\Big|\Big|$. Igitur $+m + \frac{\frac{1}{3}}{m} \,\Pi\, + 2$, ideſt $+mm + \frac{1}{3} \,\Pi\, + 2m$, vel ordinatâ æquatione $+3mm$ $-6m \,\Pi\, -1$, & utramque partem $|\overline{\underline{3}}|^{do}$ habetur $27 m^6$ $-216 m^3 + 54 m^3 \,\Pi\, -1$, ideſt $+27 m^6 - 162 m^3$ $\Pi\, -1$.

Atqui $+m^6 \,\Pi\, + 18 - \frac{1}{27} + 6 \sqrt{+9 - \frac{1}{27}}\;\Big|$, & $+27 m^6$ $\Pi\, + 486 - 1 + 162 \sqrt{+9 - \frac{1}{27}}\;\Big|$. Pariter $+m^3 \,\Pi\, +$ $3 + \sqrt{+9 - \frac{1}{27}}\;\Big|$, & $-162 m^3 \,\Pi\, - 486 - 162 \sqrt{+9 - \frac{1}{27}}\;\Big|$,

quæ duæ ſummæ inter ſe junctæ efficiunt $-1\,\Pi -1$, ut erat oſtendendum.

Eſto $2^{o} + e^{3} + 1e - 10\,\Pi\, o$. Hîc $+ e\,\Pi + 2$, $+ q\,\Pi +$
$+ q - r$
1, & $+ r\,\Pi + 10$, quare juxta regulam fit

$$\sqrt[3]{+5+\sqrt{+25+\tfrac{1}{27}}} \quad - \frac{\tfrac{1}{3}}{+\sqrt[3]{+5+\sqrt{+25+\tfrac{1}{27}}}} \quad \Pi + 2.$$

OSTENSIO.

Brevitatis cauſâ ponatur $+ m\,\Pi +$
$\sqrt[3]{+5+\sqrt{+25+\tfrac{1}{27}}}$. Igitur $+ m - \dfrac{\tfrac{1}{3}}{m}\,\Pi + 2$;

ideſt $+ mm - \tfrac{1}{3}\,\Pi + 2m$, vel ordinatâ æquatione habetur $+ 3mm - 6m\,\Pi + 1$, & utramque partem $\boxed{3}^{do}$ habetur $+ 27\,m^{6} - 216\,m^{3} - 54\,m^{3}\,\Pi + 1$, ideſt $+ 27\,m^{6} - 270\,m^{3}\,\Pi + 1$.

Atqui $+ m^{6}\,\Pi + 50 + \frac{1}{27} + 10\sqrt{+25+\tfrac{1}{27}}$, & $27m^{6}\,\Pi + 1350 + 1 + 270\sqrt{25+\tfrac{1}{27}}$, & $+ m^{3}\,\Pi + 5 + \sqrt{+25+\tfrac{1}{27}}$, & $- 270m^{3}\,\Pi - 1350 - 270\sqrt{+25+\tfrac{1}{27}}$ quæ duæ ſummæ inter ſe junctæ efficiunt $+ 1\,\Pi + 1$, ut erat oſtendendum.

ALITER PRO EADEM INVESTIGATIONE.

Eſto $1^{o} + a\,\Pi + \sqrt[3]{m^{2}n} + \sqrt[3]{mn^{2}}$, & utramque partem $\boxed{3}^{do}$ fit $+ a^{3}\,\Pi + m^{2}n + mn^{2} + 3mn \times (+\sqrt[3]{m^{2}n} + \sqrt[3]{mn^{2}}\,\Pi) + a$. Ergo $+ a^{3} - 3mna - m^{2}n\,\Pi\, o$.
$- mn^{2}$

Eſto 2° $+ a \sqcap + \sqrt[3]{m^2 n} - \sqrt[3]{m n^2}$, & utramque partem $\boxed{3}$do fit $+ a^3 \sqcap + m^2 n - m n^2 - 3 m n \times (+ \sqrt[3]{m^2 n} - \sqrt[3]{m n^2} \sqcap) + a$. Ergo $+ a^3 + 3 m n a - m^2 n \sqcap o$.
$+ m n^2$

Quare 1° ſi ſit $+ a^3 - q a - r \sqcap o$. Erit a ſumma duarum $\sqrt[3]{}$, quarum productum eſt $\frac{1}{3} q$, ſumma verò æquitrimenſorum ab ipſis eſt $+ r$.

Quare 2° ſi ſit $+ a^3 + q a - r \sqcap o$. Erit a differentia duarum $\sqrt[3]{}$, quarum productum eſt $+ \frac{1}{3} q$; differentia verò $\boxed{3}$orum ab ipſis fit $+ r$.

Nam ſi $3 m n$ interpretemur per q, & $+ m^2 n + m n^2$, vel $+ m^2 n - m n^2$ per $+ r$ exſurget $+ a^3 - q a - r \sqcap o$, vel $+ a^3 + q a - r \sqcap o$, ut priùs.

Quoniam verò $\square$um à dimidia ſumma duorum $\boxed{3}$orum ſemper exeedit $\square$um $\boxminus$i ſub eorum radicibus (etenim $\left(\frac{\square\, m^2 n + m n^2}{2} \sqcap\right) \frac{+ m^4 n^2 + 2 m^3 n^3 + m^2 n^4}{4}$, & $(\boxed{3} \boxminus m n \sqcap) + m^3 n^3$, quibus terminis in 4 ductis fit $m^4 n^2 + 2 m^3 n^3 + m^2 n^4$, & $+ 4 m^3 n^3$, & ablatis utrimque $+ 2 m^3 n^3$, relinquitur $+ m^4 n^2 + m^2 n^4$ F $2 m^3 n^3$) eſtque ipſe ultimus terminus in æquatione $+ a^3 - q a - r \sqcap o$ ſumma 2orum $\boxed{3}$orum, quorum triplex $\boxminus$um æquatur coefficienti penultimi termini; hinc fit ut hujuſmodi formulæ æquationes non ſemper eumdem habeant generationis ſuæ ortum. Nam quando æquitrimenſum à triente coefficientis penultimi termini ſuperat æquibimenſum ab ultimi dimidio, tunc aliam ſortiuntur dictæ æquationes conſtitutionem, ut poſteà videbimus.

LEMMA GENERALE.

Æquibimenſum differentiæ duarum ejuſdem gradus poteſtatum, plus quadruplà ſimili poteſtate bimenſi ſub earum radicibus æquatur æquibimenſo aggregati ipſarum poteſtatum.

Sunto

Sunto duæ quælibet ejuſdem gradus poteſtates a^3, & e^3.

Multiplicatio 1ª.	Multiplicatio 2ª.
$+a^3 - e^3$ } differentia $\boxed{3}$orum	$+ae$
$+a^3 - e^3$ }	$+ae$ $\square$um ſub a, & e
	$+ae$
	$+a^3e^3 \ \Pi \ \boxed{3}$° $\square$ⁱ ae

Productum $+a^6 - 2a^3e^3 + e^6$ } additio
$+4a^3e^3$ }

Summa $\overline{+a^6 + 2a^3e^3 + e^6} \ \Pi \ \square$° $\overline{+a^3 + e^3}|$. ut erat oſtendendum.

Quoniam verò dum inter ſe duo æquitrimenſa junguntur, vel unum ab alio demitur, ſic ut eorum ſumma, vel differentia ad hanc formam reducatur ccd, exiſtente $cc \ \Pi \ \square$ ſub ipſorum $\boxed{3}$orum radicibus, fit d ſumma vel differentia duarum quantitatum, quæ cum dictorum $\boxed{3}$orum radicibus intermediis conſtituunt ſeriem quatuor continuè proportionalium: hinc, & ex reliqua hujus inveſtigationis doctrina plures methodi eruuntur ſolvendi æquationes trium dimenſionum, quæ duarum mediarum proportionalium inventionem requirunt. Verùm operæpretium eſt quod mox aſſeruimus obiter demonſtrare.

Sunto $a. \sqrt[3]{aae}|. \sqrt[3]{aee}|. e \div$ fit $aae \pm aae \ \Pi \ ae \times a \pm e$. Quod ſi $a \pm e$ interpretemur per d, & ae per cc, fiet $ccd \ \Pi \ aae \pm aee$: hoc eſt ſi ſumma, vel differentia duorum æquitrimenſorum $aae \pm aee$ æqualis ſit ccd, erit d æqualis $a \pm e$, quæ eſt ſumma, vel differentia duarum quantitatum, quæ cùm dictorum $\boxed{3}$orum radicibus intermediis conſtituunt ſeriem quatuor continuè proportionalium, at cc æquabitur bimenſo ſub dictorum $\boxed{3}$orum radicibus comprehenſo.

EXTRACTIO RADICIS

EX OMNIBUS TRIMENSIS ÆQUATIONIBUS, QUÆ PER MESOLABUM RESOLVI POSSUNT.

Eſto 1° $+ a^3 + qa - r \,\Pi\, o$. Jam per præmiſſorum doctrinam agnoſcitur in hac æquatione intelligendas eſſe duas radices quarum bimenſum eſt $+ \frac{1}{3} q$, differentia verò a, at differentia $\boxed{3}$orum ab ipſis fit r,

Quare ponatur $e^3 \,\Pi\, \boxed{3}$ F, ergo $+ e^3 - r \,\Pi\, \boxed{3}$ ꟼ, ut patet ex antè dictis, & per præmiſſum Lemma fit $\square\ \overline{+ 2e^3 - r} \,\Pi\, + rr + \frac{4}{27} q^3$. Ergo $+ 2e^3 - r \,\Pi\, + \sqrt{+ rr + \frac{4}{27} q^3}$, vel $+ e^3 \,\Pi\, + \frac{1}{2} r + \sqrt{+ \frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3}$,

$$\text{\& conſequenter } + \sqrt[3]{+ \frac{1}{2} r + \sqrt{+ \frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3}} \quad \frac{- \frac{1}{3} q}{+ \sqrt[3]{+ \frac{1}{2} r + \sqrt{\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3}}} \quad \Pi + a.$$

Quod ſi pro $\boxed{3}$ ꟼ poſuiſſem e^3 habuiſſem $+ e \,\Pi\, + \sqrt[3]{- \frac{1}{2} r + \sqrt{+ \frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3}}$, ut manifeſtum eſt.

Nec differt hæc radicis extractio ab ea quæ primùm inventa eſt, cujus auxilio æquationes trimenſæ affectæ, & per meſolabum reſolubiles, ad puras revocantur.

ALITER, ET FACILLIME.

Poſito $+ a^3 + 3cca - ccd \,\Pi\, o$, manifeſtum eſt ex antè dictis, d eſſe differentiam duarum quantitatum, quæ cum duorum $\boxed{3}$orum radicibus intermediis quarum bimenſum eſt $+ \frac{1}{3} cc$, & quarum differentia eſt a, conſtituunt ſeriem quatuor continuè proportionalium.

Igitur $\pm \frac{1}{2} d + \sqrt{+ \frac{1}{4} dd + \frac{1}{3} cc} \,\Pi\, \begin{matrix} + m, \text{ majori.} \\ + n, \text{ minori,} \end{matrix}$

& conſequenter $+ a \,\Pi\, + \sqrt[3]{mmn} - \sqrt[3]{mmn}$.

Si verò ita proponatur æquatio $+a^3 + qa - r \,\Pi\, o$ erit $d \,\Pi\, \frac{+3r}{q}$, & conſequenter $\pm \frac{3r}{2q} + \sqrt{\frac{1}{4}\frac{9rr}{qq} + \frac{1}{3}q} \,\Pi\, \frac{+m}{+n}$. Quare, ut priùs, erit $+a \,\Pi + \sqrt[3]{mmn}. - \sqrt[3]{mmn}$.

Exempla in Numeris.

Eſto $\underset{+q}{+a^3} \underset{-r}{+24a - 56} \,\Pi\, o$, fit $\frac{1}{3} q \,\Pi\, +8$, & $\frac{+3r}{q} \,\Pi\, +7$, ergo juxta canonis legem fit $\left(\pm\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{+49}{4} + 8} \,\Pi\right) \frac{9}{2} \,\Pi\, \Big) \frac{+8}{+1} \,\Pi\, \frac{+m}{+n}$. Ergo $+a \,\Pi + \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{8}$, id eſt $+a \,\Pi\, +2$, quod quidem verum eſt.

Adhuc aliter sed difficiliùs.

Poſito ut priùs $+a^3 + qa - r \,\Pi\, o$. Fiat $e \,\Pi$ radici $|\boxed{1}|^{1}\,\Pi$, ergo $\frac{+q}{3e} \,\Pi$ radici $|\boxed{1}|^{1}$ r. Quare $\frac{+q^3}{27e^3} - e^3 \,\Pi\, +r$, per præmiſſum lemma, vel $+e^6 \,\Pi\, -re^3 \frac{+qr}{27}$. Ergo $e^3 \,\Pi\, -\frac{1}{2}r + \sqrt{+\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}$, & conſequenter $+e \,\Pi + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}}$.

At poſito $y \,\Pi$ radici $|\boxed{1}|$ r fit $+y^3 \frac{-q^3}{27y^3} \,\Pi\, +r$. Ergo $+y^6 \,\Pi\, +ry^3 + \frac{1}{27}q^3$, igitur $y^3 \,\Pi\, +\frac{1}{2}r + \sqrt[3]{+\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}$, & conſequenter $+y \,\Pi + \sqrt[3]{+\frac{1}{2}r + \sqrt{+\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}}$. Ergo $(y - e \,\Pi) + a \,\Pi + \sqrt[3]{\frac{1}{2}r + \sqrt{+\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{+\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}}$

Hoc idem per præmiſſum lemma ſine ulla ſuppoſitione ſic concluditur. Nam inde ſequitur $+ rr \tfrac{4}{27} q^3$ æquari æquibimenſo aggregati duorum æquitrimenſorum, quorum differentia eſt $+ r$ Ergo $\sqrt{+ rr + \tfrac{4}{27} q^3}\,|$ Π aggregato dictorum $|\boxed{1}|$orum, & $\sqrt{+ \tfrac{1}{4} rr + \tfrac{1}{27} q^3}\,|$ Π dimidio ejuſdem aggregati, cui additâ, vel demptâ ſemidifferentiâ ipſorum $|\boxed{1}|$orum nempe $\tfrac{1}{2} r$ fit $+ \tfrac{1}{2} r + \sqrt{+ \tfrac{1}{4} rr + \tfrac{1}{27} q^3}\,|$ Π $|\boxed{1}|$ ^{r}, & $- \tfrac{1}{2} r + \sqrt{+ \tfrac{1}{4} rr + \tfrac{1}{27} q^3}\,|$ Π $|\boxed{1}|\urcorner$; differentia verò radium ab his $|\boxed{1}|$is, ſive radix æquationis propoſitæ eſt

$$\left.\begin{array}{l} + \sqrt[3]{+ \tfrac{1}{2} r + \sqrt{+ \tfrac{1}{4} rr + \tfrac{1}{27} q^3}\,|}\,| \\ - \sqrt[3]{- \tfrac{1}{2} r + \sqrt{+ \tfrac{1}{4} rr + \tfrac{1}{27} q^3}\,|}\,| \end{array}\right\} \Pi + a, \text{ ut priùs.}$$

Eſto 2° $+ a^3 - qa - r \; \Pi \; o$. Quia $\frac{3r}{q}$ eſt ſumma duarum quantitatum, quæ cum duorum æquitrimenſorum radicibus intermediis quarum $\square$um eſt $\tfrac{1}{3} q$, & quarum ſumma eſt a conſtituunt ſeriem quatuor continuè proportionalium. Igitur

$$+ \frac{3r}{2q} \pm \sqrt{+ \frac{9}{4} \frac{rr}{qq} - \frac{1}{3} q}\;\Big| \; \Pi \; \begin{array}{l} + m. \\ + n. \end{array}$$

Igitur erit $a \; \Pi + \sqrt[3]{m^2 n}\,| + \sqrt[3]{mn^2}\,|$.

ALITER.

Poſito ut priùs $e \; \Pi$ radici $|\boxed{1}|$ ^{r}, vel $\urcorner$ fit $\frac{q}{3e} \; \Pi$ radici alterius $|\boxed{1}|$i, ergo $+ e^3 + \frac{q^3}{27 e^3} \; \Pi + r$, & $e^6 \; \Pi$

$$+ re^3 - \frac{1}{27} q^3, \text{ ergo}$$

$$+ e^3 \Pi + r \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} rr - \frac{1}{27} q^3}\;\Big|. \text{ Ergo}$$

$$+ a \,\Pi + \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{+\tfrac{1}{2} r + \sqrt{\tfrac{1}{4} rr - \tfrac{1}{27} q^3}} \\ + \sqrt[3]{+\tfrac{1}{2} r - \sqrt{\tfrac{1}{4} rr - \tfrac{1}{27} q^3}} \end{array} \right\}$$

Hoc idem per præmiſſum lemma ſine ulla ſuppoſitione ſic concluditur. Nam inde ſequitur $+ rr - \tfrac{4}{27} q^3 \,\Pi\, \square$ differentiæ duorum $\boxed{3}$orum, quorum ſumma eſt r, ex propoſitæ æquationis conſtitutione. Quamobrem $\sqrt{+ rr - \tfrac{4}{27} q^3} \,\Pi$ differentiæ dictorum $\boxed{3}$orum, & $+ \sqrt{+ \tfrac{1}{4} rr - \tfrac{1}{27} q^3} \,\Pi$ ſemidifferentiæ ipſorum, quæ addita & dempta ab eorum ſemiſumma, videlicet $+ \tfrac{1}{2} r$ dat $+ \tfrac{1}{2} r + \sqrt{+ \tfrac{1}{4} rr - \tfrac{1}{27} q^3} \,\Pi\, \boxed{3}$ F, & $+ \tfrac{1}{2} r - \sqrt{+ \tfrac{1}{4} rr - \tfrac{1}{27} q^3} \,\Pi\, \boxed{3}$ Ꞁ; Igitur ſumma radicum ab his $\boxed{3}$is, ſive radix propoſitæ æquationis eſt

$$\left. \begin{array}{l} + \sqrt[3]{+\tfrac{1}{2} r + \sqrt{+\tfrac{1}{4} rr - \tfrac{1}{27} q^3}} \\ + \sqrt[3]{+\tfrac{1}{2} r - \sqrt{+\tfrac{1}{4} rr - \tfrac{1}{27} q^3}} \end{array} \right\} \Pi + a.$$

Vel ſi haberetur $+ a^3 - qa + r.$

foret $+ a \,\Pi + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} r + \sqrt{+\tfrac{1}{4} rr - \tfrac{1}{27} q^3}}$
$+ \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} r - \sqrt{+\tfrac{1}{4} rr - \tfrac{1}{27} q^3}}.$

Atque hæc eſt ipſiſſima Cardani Regula, cujus mentionem facit Carteſius in ſua Geometra, imultis anxiè quærentibus hujus extractionis originem, quæ tamen inventu facillima eſt, ut hîc apparet. Sed neutiquam crediderim genuinum hunc illius inveniendæ modum ipſis innotuiſſe, alioquin cæteros ejuſdem rei faciendæ modos, qui hîc proponuntur, quique ab eadem conſideratione dependent, ſilentio non prætermiſiſſent: nec procul dubio generalem hujus methodi uſum, qui ſe ad extrahendas radices omnium æquationum, per aſſumptionem aliquot mediarum proportionalium, inter extremas cognitas reſolubilium, ut poſteà videbimus, extendit, ignoraſſent.

Priores Methodi ideò ſunt eligendæ, quod per illas tantum opus ſit inter duas quantitates datas, duas medias proportionales invenire, qui labor per ultimam duplicatur. Ex prima autem methodo patet ratio quomodo hujuſmodi æquationes ad puras revocantur.

SCHOLIUM I.

Atque hæc ferè ſunt quæ de exprimendo radicum è trimenſis æquationibus valore ab authoribus afferuntur; quamquam & illa multò ampliora fecerimus, ſed quantùm ſpectat ad modum exprimendi radices è reliquis trimenſis æquationibus, quarum ſolutio anguli dati æquitriſertione perficitur, quæ quidem pars maxima eſt, ipſis hæret aqua. Solus Carteſius, quùm poſt Vietam, atque Albertum Girardum vidiſſet ex æquatione $+ a^3 - qa - r \, \Pi \, o$ vel $+ a^3 - qa + r \, \Pi \, o$, in quibus $\frac{1}{27} q^3 \, \Gamma \, \frac{1}{4} rr$, radicem æquari ſubtenſæ trientis arcus dati, putavit conſultum fore ſi illa exprimeretur per aliquem caracterem, qui ſubtenſam trientis illius arcus dati denotaret, verbi gratiâ per $s \, \frac{1}{3} \frown$, eodem ferè modo quo radices ſurdæ peculiari quadam nota ſignificantur. Et hoc certè utilitate ſuâ non careret ſi modo nos intra geometriæ limites contineré velimus, nam caracter ille geometricum quæſitæ quantitatis valorem ſatis aptè repræſentaret, qui certè valor nihil aliud eſt quàm jam nominata ſubtenſa trientis arcus dati. Verùm tale ſignum ars Analytica meritò rejicit, cùm ejus uſus ad numeros, circa quos etiam ſuum exercet officium, ſe extendere nequeat. Nullum enim numericum, ſi modo de numeris ſermo ſit, quæſitæ quantitatis valorem exhibet, neque quid in Arithmeticis quærendum ſit, indicat. Unde tantùm abeſt ut aliquâ notitiâ mentem noſtram imbuat, quin illam reliquit ſummopere ſollicitam ad quodnam numerorum genus quantitas tali modo deſignata pertineat. Enimverò, quoniam dantur æquationes numericæ, quæ ſymbolicis omninò ſimiles ſunt, aut dicendum eſt illas radicibus carere in quantùm numericæ ſunt, aut earum radices lineam quandam eſſe, vel certè alio modo quàm per ſubtenſam trientis arcus

dati exprimi non poſſe; quod certè abſurdum eſt, nam quod arithmeticum eſt, numeris: quod verò Geometricum magnitudinibus, unumquodque per id quod ſibi eſſentiale eſt, deſignari debet. Adde quod hoc ſignum mera in arithmeticis ignorantiæ nota eſſet, cùm ejus rei, de qua ſuſcepta eſt inſtitutio, impoſſibilem innuat explicationem. Hæc cùm ita ſe habeant verus & genuinus ejuſmodi radices exhibendi modus mihi tradendus eſſet, ſed altioris eſt ſpeculationis iſta inquiſitio, quàm ut hoc loco fieri debeat. Interim doctos monere ſufficiet radices æquationum, quæ triſectionem anguli pro ſolutione deſiderant, naturam habere planè diverſam ab ea, quæ vulgò ipſis tribuitur, mirorque à nullo detectam, quum ipſa mentis oculos aperienti, ultrò ſe ſe primo intuitu conſpiciendam præbeat; ſed, ut ferè ſunt hominum ingenia, ſpretis, aut leviter, & quaſi perfunctoriè, feſtinanterque obſervatis iis, quæ maximè obvia ſunt, ad ardua ſolùm, & ſublimia mentis impetu rapiuntur. Harum tamen æquationum geneſim, atque conſtitutionem breviter exponere non pigebit. Itaque

INVESTIGATIO IV.

De geneſi, atque conſtitutione æquationum, per triſectionem anguli reſolubilium.

Ponamus $a - b \Pi o$, & $a - c \Pi o$, atque $a + d \Pi o$. His poſitionibus inter ſe multiplicatis oritur

$$\begin{array}{llll} +a^3 & -b\,aa & -bd\,a & +bcd \,\Pi\, o. \\ & -c & -cd & \\ & +d & +bc & \end{array}$$

In qua æquatione ſi ſupponatur $+d \Pi + b + c$, evaneſcet terminus ab aa denominatus, & relinquetur

$$\begin{array}{lll} +a^3 & -bd\,a & +bcd \,\Pi\, o. \\ & -cd & \\ & +bc & \end{array}$$

Deinde quoniam ex hypotheſi $+d \Pi + b + c$, igitur $-bd \Pi - bb - bc$, & $-cd \Pi - bc - cc$, atque $+bcd \Pi + bbc + bcc$: factiſque in æquationis reſiduo hiſce mutationibus habetur

$$\begin{array}{lll} +a^3 & -bb\,a & +bbc \,\Pi\, o. \\ & -bc & +bcc \\ & -cc & \end{array}$$

Itaque ſi detur $+a^3 - qa + r \sqcap o$ & ſit $+\frac{1}{27}q^3 \sqsupset + \frac{1}{4}rr$, enunciabitur a de duobus quantitatibus b, & c, à quibus ſingulis $\square^a$ bb & cc adjecta ▭ ſub ipſis efficiunt q. Quod autem fit ab una in $\square^{um}$ reliquæ, auctum ▭ ſub ambabus, hoc eſt $c \times bb + bc$, vel $b \times cc + bc$: vel etiam quod fit ab aggregato ipſarum quantitatum b & c in earum ▭ ducto, hoc eſt $+b + c \times bc \sqcap + r$.

2° Ponamus $a + b \sqcap o$, & $a + c \sqcap o$, atque $a - d \sqcap o$. His poſitionibus, ut priùs, inter ſe multiplicatis oritur

$$\begin{array}{llll} +a^3 & +baa & +bca & -bcd \sqcap o. \\ & +c & -bd & \\ & -d & -cd & \end{array}$$

Et adhuc facto $+d \sqcap + b + c$, evaneſcet terminus ab aa denominatus, ac relinquetur

$$\begin{array}{lll} +a^3 & +bca & -bcd \sqcap o. \\ & -bd & \\ & -cd & \end{array}$$

Deinde quoniam ex hypotheſi fit $+d \sqcap + b + c$, igitur $-bd \sqcap - bb - bc$; & $-cd \sqcap - bc - cc$, atque etiam $-bcd \sqcap - bbc - bcc$, & factis in æquationis reſiduo his mutationibus habetur

$$\begin{array}{lll} +a^3 & -bba & -bbc \\ & -bc & -dcc \\ & -cc & \end{array} \sqcap o.$$

Itaque ſi detur $+a^3 - qa - r \sqcap o$, & ſit $\frac{1}{27}q^3 \sqsupset \frac{1}{4}rr$, enunciabitur a, ut ante de duabus quantitatibus b, & c, à quibus ſingulis $\square^a$ bb, & cc adjuncta ▭^{o} ſub ipſis nempe bc efficiunt q. Quod autem fit ab una in $\square^{um}$ reliquæ auctum ▭^{o} ſub ipſis hoc eſt $+b \times cc + bc$, vel $+c \times bb + bc$; vel etiam quod fit ab aggregato dictarum quantitatum b, & c in earum ▭^{um} ducto videlicet $+b + c \times bc \sqcap + r$.

Vel iiſdem quæ priùs poſitis quoniam ex hypotheſi fit $+d \sqcap + b + c$, ergo $+d - c \sqcap + b$, ergo etiam $+bc \sqcap + cd - cc$, & $-bd \sqcap - dd + cd$, & adhuc $-bcd \sqcap - cdd + ccd$, & factis in æquationis reſiduo hiſce mutationibus habetur

$$\begin{array}{lll} +a^3 & -cca & +ccd \\ & +cd & -cdd \\ & -dd & \end{array} \sqcap o.$$

Itaque

Itaque ſi detur $+a^3 - qa - r \,\Pi\, o$ & ſit $\frac{1}{27}q^3$ F $\frac{1}{4}r^2$, dicetur a de duabus quantitatibus c, & d, à quibus ſingulis $\square^a + cc + dd$, multata ▭° ſub ipſis, nempe $+ cd$ efficiunt q. Quod autem fit à minori quantitate in $\square$um majoris, multatum ▭° ſub ipſis quantitatibus hoc eſt $+c \times +dd - cd$, vel quod fit à majori quantitate in ▭um ſub ambabus, multatum $\square$° minoris hoc eſt $+d \times +cd - cc$, vel etiam quod fit à differentia dictarum quantitatum in earum ▭um ducta hoc eſt $+d - c \times cd \,\Pi\, +r$.

THEOREMA.

Æquitrimenſum à triente aggregati è binis duarum quantitatum æquibimenſis, & è bimenſo ſub ipſis quantitatibus comprehenſo excedit æquibimenſum dimidii trimenſi, quod fit ab aggregato dictarum quantitatum in earum bimenſum multiplicato.

Sunto duæ quantitates b, & c.

Dico $\boxdot^{um}\ \frac{bb + bc + cc}{3}$ F $\square\ \frac{bbc + bcc}{2}$.

Nam $\boxdot\ \frac{bb + bc + cc}{3} \,\Pi$

$$\frac{+b^6 + 3b^5c + 6b^4c^2 + 7b^3c^3 + 6b^2c^4 + 3bc^5 + c^6}{27},$$

& $\square\ \frac{bbc + bcc}{2} \,\Pi\, \frac{+b^4c^2 + 2b^3c^3 + b^2c^4}{4}$,

& omnibus terminis per 4 deinde per 27 ductis oritur ab una parte $+4b^6 + 12b^5c + 24b^4c^2 + 28b^3c^3 + 24b^2c^4 + 12bc^5 + 4c^6$, ab altera verò $+27b^4c^2 + 54b^3c^3 + 27b^2c^4$, & ablatis utrimque $+24b^4c^2 + 28b^3c^3 + 24b^2c^4$, relinquitur $+4b^6 + 12b^5c + 12bc^5 + 4c^6$, & $+3b^4c^2 + 26b^3c^3 + 3b^2c^4$.

Atqui $4b^6 . 4b^5c :: 4bc^5 . 4c^6$. Ergo $+4b^6 + 4c^6$ F $4bc^5 + 4b^5c$. Et hunc valorem vero minorem in lo-

cum $4 b^6 \cdot 4 c^6$ ſubrogando habetur $+ 16 b^5 c + 16 bc^5$ & $+ 3 b^4 c^2 + 26 b^3 c^3 + 3 b^2 c^4$, vel omnibus terminis per bc diviſis fit $+ 16 b^4 + 16 c^4$, & $+ 3 b^3 c + 26 b^2 c^2 + 3 bc^3$.

Sed $b^3 c . b^2 c^2 . bc^3 \div$, ergo $+ bc^3 + b c^3 \sqsupset + 2 b^2 c^2$, & $+ 13 b^3 c + 13 b c^3 \sqsupset + 26 b^2 c^2$, & hunc valorem vero majorem in locum $+ 26 b^2 c^2$ ſubrogando habetur $+ 16 b^4 + 16 c^4$, & $+ 16 b^3 c + 16 bc^3$, vel omnibus terminis per 16 diviſis fit $+ b^4 + c^4$ & $+ b^3 c + bc^3$.

Quare cùm ab una parte aliquid ſit detractum, ſubrogando nempe minores quantitates $+ 4 bc^5$ in locum majorum $+ 4 b^6 + 4 c^6$; alteri verò aliquid ſit additum per ſubrogationem majorum quantitatum $+ 13 b^3 c + 13 bc^3$ in locum minoris $+ 26 b^2 c^2$, reſtetque poſteà pars imminuta $+ b^4 + c^4$ major ea parte quæ augmentum recepit, nempe $+ b^3 c + bc^3$: (nam $b^4 . b^3 c \div bc^3 . c^4$, ergo $+ b^4 + c^4 \sqsupset + b^3 c + bc^3$) patet propoſitionis veritas.

SCHOLIUM II.

Notatu dignum eſt radices æquationum trimenſarum per meſolabum reſolubilium eſſe quidem ſummam, vel differentiam duarum radicum 3æ poteſtatis, ſed earum tantùm, quarum productum eſt abſolutum, quoniam id ipſum ſemper æquatur coëfficienti penultimi termini quod ſurdo carere debet in æquationibus bene ordinatis.

Unde ſi duæ ſumerentur $\sqrt[3]{\ }$, quarum productum ſurdum foret, & ex earum ſumma vel differentia æquatio conficeretur, non poſſet illa à ſuo radicali ſigno liberari, quin ſimul ad 9um gradum aſcenderet.

Verbi gratiâ ſumatur $+ \sqrt[3]{ccg}$, & $\sqrt[3]{ccd}$ ex quarum ſumma, quæ ſit æqualis $+ a$ æquatio conficiatur, ea ſic ſe habebit $+ a^3 c \sqrt[3]{cdg}\, a \begin{matrix} - ccd \\ - ccg \end{matrix} \sqcap o$, vel poſito

$+ ccd + ccg \sqcap + cck$ fiet $+ a^6 - 3 c \sqrt[3]{cdg}\, a$

$-cck \Pi o$, & per metatheſim $+a^3 - cck \Pi + 3c\sqrt[3]{cdg} \,| a$. Quare

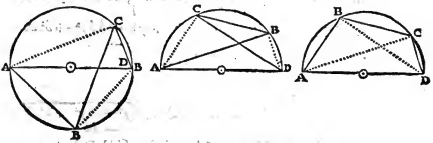
$+a^9 - 3ccka^6 + 3c^4k^2a^3 - c^6k^3 \Pi + 27c^4dga^3$, & quia ſupponi poteſt $a^3 \Pi mme$, illaque arbitrabilis litera m infinitas interpretationes admittit, poterimus habere completam æquationem trimenſam ex incognita e, quæ 2[di] termini ablatione in eandem formulam, quàm propoſita æquatio incidat. Atque ita, quod jam dixi, æquationes, per aſſumptionem duarum mediarum proportionalium reſolubiles, erunt quidem ſemper ſumma, vel differentia duarum $\sqrt[3]{\ }$, quarum productum eſt abſolutum, verùm aliquando radices illæ erunt ab aliis ortæ, quarum productum ſurdum eſt, & quarum ſumma vel differentia æquatur uni ex mediis proportionalibus inter m, & e videlicet $a \Pi \sqrt[3]{mme}\,|$

ALITER.

De geneſi, atque conſtitutione æquationum trimenſarum, per anguli triſectionem reſolubilium.

PROBLEMA SCHOOTENII.

In circulo, cujus diameter A D inſcriptis tribus inæqualibus rectis lineis, A B, B C, & C D, ſibi invicem contiguis, quarum extrema prodeant ex diametri terminis A & D. Oportet ex datis tribus dictis lineis invenire diametrum A D.

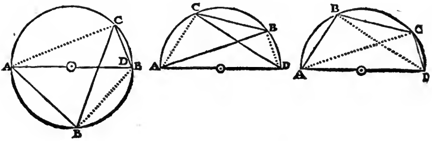


DETERMINATIO CASUUM.

Tres caſus hîc conſiderandi ſunt, juxta quos hæ inſcriptæ diverſimodè in circulo intelligi poſſunt. 1[us] quando

Dd ij

rectæ AB, & CD è diametri terminis prodeunt ad diverſas partes. 2us quando ipſæ ex iiſdem terminis eductæ ſunt ad eandem partem, ſe ſe mutuò interſecantes. Ultimus autem quando dictæ lineæ non ſe interſecant. Pro tribus autem iſtis caſibus eadem eſt demonſtratio.



PRÆPARATIO.

AB $\sqcap$ b
BC $\sqcap$ c
CD $\sqcap$ d
AD $\sqcap$ y

DEMONSTRATIO.

Ex circuli natura AC $\sqcap \sqrt{yy - dd}$ & BD $\sqcap \sqrt{yy - bb}$, fit verò (*in prima figura*) ($\square$ AC $\times$ BD $\sqcap$) $+\sqrt{y^4 \begin{smallmatrix}-bb\\-dd\end{smallmatrix} y^2 + b^2d^2}$ ($\square$ AB $\times$ CD $\sqcap$) $+bd$ $\sqcap$ ($\square$ AD $\times$ BC $\sqcap$) $+cy$. Quare $+cy - bd \sqcap \sqrt{y^4 \begin{smallmatrix}-bb\\-dd\end{smallmatrix} y^2 + b^2d^2}$, & conſequenter $+c^2y^2 - 2bcdy + b^2d^2 \sqcap + y^4 \begin{smallmatrix}-bb\\-dd\end{smallmatrix} y^2 + b^2d^2$.

Igitur $+y^3 \begin{smallmatrix}-bb\\-cc\\-dd\end{smallmatrix} y + 2bcd \sqcap o$.

Vel (*ut in 2ª fig.*) ($\square$ AC $\times$ BD $\sqcap$) $+\sqrt{y^4 \begin{smallmatrix}-bb\\-dd\end{smallmatrix} y^2 + b^2d^2}$ $+$ ($\square$ AD $\times$ CB $\sqcap$) cy $\sqcap$ ($\square$ AB $\times$ CD $\sqcap$) $+bd$. Ergo $+bd - cy \sqcap \sqrt{y^4 \begin{smallmatrix}-bb\\-dd\end{smallmatrix} y^2 + b^2d^2}$. Ergo

$$+\ b^2d^2 - 2bcdy + c^2y^2\ \Pi + y^4 \begin{array}{l} - bby^2 \\ - dd \end{array} + b^2d^2.$$

Igitur $+y^3 \begin{array}{l} - bby \\ - cc \\ - dd \end{array} + 2bcd\ \Pi\ o.$

Vel tandem (*ut in tertia figura*) ($\square$ AC × BD Π)

$$+\sqrt{\begin{array}{l} y^4 - bbyy + b^2d^2 \\ \quad - dd \end{array}}\ \Pi\ (+ \square \text{AB} \times \text{CD}\ \Pi) + bd$$

($+ \square$ BC × AD Π) $+ cy$, & utramque partem $\square^{do}$, fit $+ y^4 \begin{array}{l} - bbyy \\ - dd \end{array} + b^2d^2\ \Pi + b^2d^2 + 2bcdy + c^2y^2$,

Igitur $+ y^3 \begin{array}{l} - bby \\ - cc \\ - dd \end{array} - 2bcd\ \Pi\ o.$

E duobus problematibus à Schootenio propoſitis unum confeci, & breviſſimam demonſtrationem concinnavi. Quomodo autem in æquatione, quæ ex hoc problemate deducitur, æquitrimenſum trientis quantitatis cognitæ penultimi termini ſuperet æquibimenſum ab ultimi dimidio, id optimè idem Schootenius demonſtravit in Appendice ad æquationes cubicas.

Atque hæc eſt ſecunda geneſis, atque conſtitutio trimenſarum æquationum, per anguli triſectionem reſolubilium.

CAPUT IV.

De ſolutione quadrimenſarum Æquationum per earum depreſſionem ad tertium gradum.

POſtquam exploratum eſt propoſitam æquationem quatuor dimenſiones habentem dividi non poſſe per aliquem è factoribus ultimi termini, ea reducatur ad tertium gradum per ſequentes regulas.

REGULA Iª HUDDENII.

Propoſitâ qualibet æquatione quadrimenſâ, & completâ, nempe $a^4.pa^3.qa^2.ra.s \Pi o$, quærendus eſt valor hujus æquationis

$$\begin{array}{llll} +y^3 & -qyy & -4sy & -pps \;\Pi\; o \\ & & +pr & +4qs \\ & & & -rr \end{array}$$

Et habebitur

$$+aa \left.\begin{array}{l} +\frac{1}{2}p \\ +\sqrt{\frac{1}{4}pp-q+y} \end{array}\right\} a + \frac{1}{2}y \;\frac{+\frac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp-q+y}} \;\Pi\; o.$$

$$\text{Et} +aa \left.\begin{array}{l} +\frac{1}{2}p \\ -\sqrt{\frac{1}{4}pp-q+y} \end{array}\right\} a + \frac{1}{2}y \;\frac{-\frac{1}{2}p + r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp-q+y}} \;\Pi\; o.$$

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Eſto $+a^4 - 2a^3 - 3a^3 - 2a - 1 \Pi o$, Per hanc re-

$\quad\quad -p \quad -q \quad -r \quad -s$

gulam fit $+y^3 + 3yy + 4y + 4 \Pi o$. Ideſt $+y^3 + 3y^2$

$\quad\quad +4 \quad +12$

$\quad\quad\quad -4$

$+8y + 12 \Pi o$, & fit $+y \Pi -2$, quod arguit propoſitam

æquationem è duabus bimenſis æquationibus compoſitam eſſe, nam ſicut regula præcipit operando habetur $+ aa \begin{smallmatrix} -1 \\ +\sqrt{2}| \end{smallmatrix} a - 1 + \sqrt{2}| \,\Pi\, o$, atque $+ aa \begin{smallmatrix} -1 \\ +\sqrt{2}| \end{smallmatrix} a - 1 - \sqrt{2}| \,\Pi\, o$, quæ duæ æquationes inter ſe multiplicatæ propoſitam æquationem $+ a^4 - 2a^3 - 3aa - 2a - 1 \,\Pi\, o$ producunt.

REGULA II^a VIETÆ ET CARTESII.

Propoſitâ qualibet æquatione quadrimensâ, ſecundo termino carente, nimirum $+ a^4 . qa^2 . ra . s \,\Pi\, o$, quærendus eſt valor hujus æquationis $+ y^3 + 2qy^2 \begin{smallmatrix} + qq \\ -4s \end{smallmatrix} y - rr \,\Pi\, o$, & habebitur $+ a^2 + \sqrt{y}| \, a + \frac{1}{2} q + \frac{1}{2} y \frac{-r}{+2\sqrt{y}|} \,\Pi\, o$.

Atque $+ a^2 - \sqrt{y}| \, a + \frac{1}{2} q + \frac{1}{2} y \frac{+r}{+2\sqrt{y}|} \,\Pi\, o$.

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Eſto $+ a^4 \underset{-q}{-1 a^2} \underset{-r}{-2a} \underset{-s}{-1} \,\Pi\, o$. Per hanc Regulam fit $+ y^3 - 2y^2 \begin{smallmatrix} +1 \\ +4 \end{smallmatrix} y - 4 \,\Pi\, o$. Id eſt $+ y^3 - 2y^2 + 5y - 4 \,\Pi\, o$, eſtque $+ y \,\Pi\, + 1$, quod arguit propoſitam æquationem è duabus bimenſis æquationibus compoſitam eſſe, nam ſicut regula præcipit operando habetur
$+ aa + 1a + 1 \,\Pi\, o$, & $+ aa - 1a - 1 \,\Pi\, o$ quæ duæ æquationes inter ſe multiplicatæ propoſitam æquationem $+ a^4 - 2a^2 - 2a - 1 \,\Pi\, o$ reſtituunt.

REGULA III^a VIETÆ.

Propoſitâ qualibet æquatione quadrimenſâ, ſecundo termino carente, nimirum $+a^4 . q a^2 . r a . s \,\Pi\, o$, quærendus eſt valor hujus æquationis $+ y^3 - q y^2 - 4 s y$ $+ 4 q s \,\Pi\, o$, & habebitur
$- rr$

$$+aa + \sqrt{y-q}\,\big|\,a + \tfrac{1}{2}y \quad \frac{-r}{+2\sqrt{y-q}}\Big| \;\Pi\, o.$$

$$\text{Et} +aa - \sqrt{y-q}\,\big|\,a + \tfrac{1}{2}y \quad \frac{+r}{+2\sqrt{y-q}}\Big| \;\Pi\, o.$$

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Eſto $+ a^4 + 1 a^2 - 4 a - 3 \,\Pi\, o$. Per hanc regulam
$+q \quad -r \quad -s$

fit $+ y^3 - 1 y^2 + 12 y - 28 \,\Pi\, o$, eſtque $+ y \,\Pi + 2$, quod arguit propoſitam æquationem è duabus bimenſis æquationibus compoſitam eſſe, nam ſicut regula præcipit operando habetur $+ aa + 1a + 3 \,\Pi\, o$, & $+ aa - 1a - 1 \,\Pi\, o$, quæ duæ æquationes invicem multiplicatæ propoſitam æquationem $+ a^4 + 1 a^2 - 4 a - 3 \,\Pi\, o$ reſtituunt.

REGULA IV^a VIETÆ.

Propoſitâ quâlibet æquatione quadrimenſâ, ſecundo, & tertio termino carente, videlicet $+ a^4 . r a . s \,\Pi\, o$, quærendus eſt valor hujus æquationis $+ y^3 - 4 s y$ $- r r \,\Pi\, o$, & habebitur

$$+aa + \sqrt{y}\,\big|\,a + \frac{1}{2}y \quad \frac{-r \,\Pi\, o,}{+2\sqrt{y}\,\big|}$$

$$\text{Atque} +aa - \sqrt{y}\,\big|\,a + \frac{1}{2}y \quad \frac{+r \,\Pi\, o.}{+2\sqrt{y}\,\big|}$$

EXEMPLUM

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Eſto $+a^4 - 3a - 2 \,\Pi\, o$. Per hanc regulam fit $+$
$-r \quad -s$

$y^3 + 8y - 9 \,\Pi\, o$, eſtque $+y \,\Pi\, +1$, quod arguit propoſitam æquationem è duabus bimenſis æquationibus compoſitam eſſe, nam ſicut regula præcipit operando habetur

$+aa + 1a + 2 \,\Pi\, o$, & $+aa - 1a - 1 \,\Pi\, o$, quæ duæ æquationes invicem multiplicatæ propoſitam æquationem $+a^4 - 3a - 2 \,\Pi\, o$ reſtituunt.

REGULA V. VIETÆ.

Propoſitâ quâlibet æquatione quadrimenſâ, tertio, & quarto termino carente, nimirum $+a^4. pa^3. s \,\Pi\, o$, quærendus eſt valor hujus æquationis $+y^3 - 4sy + spp \,\Pi\, o$, & habebitur

$$+aa \left.\begin{matrix} +\frac{1}{2}p \\ +\sqrt{\frac{1}{4}pp - y} \end{matrix}\right\} a - \frac{1}{2}y \; \frac{-\frac{1}{2}py}{+2\sqrt{\frac{1}{4}pp - y}} \,\Pi\, o.$$

$$\text{Et } +aa \left.\begin{matrix} +\frac{1}{2}p \\ -\sqrt{\frac{1}{4}pp - y} \end{matrix}\right\} a - \frac{1}{2}y \; \frac{+\frac{1}{2}py}{+2\sqrt{\frac{1}{4}pp - y}} \,\Pi\, o.$$

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Eſto $+a^4 + 3a^3 - 8 \,\Pi\, o$. Per hanc regulam fit $+y^3$
$+p \quad -s$

$+32y - 72 \,\Pi\, o$, eſtque $y \,\Pi\, +2$, quod arguit propoſitam æquationem è duabus bimenſis æquationibus compoſitam eſſe, nam ſicut regula præcipit operando habetur $+aa + 2a - 4 \,\Pi\, o$, & $+a^2 + 1a + 2 \,\Pi\, o$, quę duæ æquationes invicem multiplicatæ propoſitam æquationem $+a^4 + 3a^3 - 8$ reſtituunt.

Ec

REGULA VI^a AUTHORIS.

Propoſitâ quâlibet æquatione quadrimensâ, tertio termino carente, nimirum $+a^4 . pa^3 . ra . s \Pi o$, quærendus eſt valor hujus æquationis, $\begin{matrix} +y^3 - 4sy + spp \\ + pr \ \ - rr \end{matrix} \Pi o$, & bebitur

$$+aa \left.\begin{matrix} +\frac{1}{2}p \\ +\sqrt{\frac{1}{4}pp - y} \end{matrix}\right\} a - \frac{1}{2}y \ \frac{-\frac{1}{2}py - r}{+2\sqrt{+\frac{1}{4}pp - y}} \ \Pi o.$$

$$\text{Et} + aa \left.\begin{matrix} +\frac{1}{2}p \\ +\sqrt{\frac{1}{4}pp - y} \end{matrix}\right\} a - \frac{1}{2}y \ \frac{+\frac{1}{2}py + r}{+2\sqrt{\frac{1}{4}pp - y}} \ \Pi o.$$

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Eſto $\begin{matrix} +a^4 - 1a^3 - 13a - 15 \Pi o. \\ \ \ \ \ -p \ \ \ \ -r \ \ \ \ \ -ſ \end{matrix}$ Per hanc regulam fit $+y^3 + 73y + 154 \Pi o$, eſtque $+y \Pi -2$, quod arguit propoſitam æquationem è duabus bimenſis æquationibus compoſitam eſſe, nam ſicut regula præcipit operando habetur $+aa + 1a + 5 \Pi o$, & $+aa - 2a - 3 \Pi o$, quæ duæ æquationes invicem multiplicatæ propoſitam ęquationem $+a^4 - 1a^3 - 13a - 15 \Pi o$ reſtituunt.

REGULA VII^a AUTHORIS.

Propoſitâ quâlibet æquatione quadrimensâ, quarto termino carente, nimirum $+a^4 . pa^3 . qa^2 . s \Pi o$, quærendus eſt valor hujus æquationis $\begin{matrix} +y^3 + qyy - 4ſy + ſpp \\ - 4qſ \end{matrix}$ Πo, & habebitur

$$+aa \left.\begin{matrix} +\frac{1}{2}p \\ +\sqrt{\frac{1}{4}pp - q - y} \end{matrix}\right\} a - \frac{1}{2}y \ \frac{-\frac{1}{2}py}{+2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q - y}} \ \Pi o$$

$$\text{Et} + aa \left.\begin{matrix} +\frac{1}{2}p \\ +\sqrt{\frac{1}{4}pp - q - y} \end{matrix}\right\} a - \frac{1}{2}y \ \frac{+\frac{1}{2}py}{+2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q - y}} \ \Pi o$$

Exemplum in Numeris.

Eſto $+a^4-3a^3-1a^2-18 \,\Pi\, o$. Per hanc regulam fit $+y^3-1yy+72y-234 \,\Pi\, o$, eſtque $+y \,\Pi\, +3$, quod arguit propoſitam æquationem è duabus bimenſis æquationibus compoſitam eſſe, nam juxta regulæ præceptum operando habetur

$+a^2-1a+3 \,\Pi\, o$, & $+a^2-2a-6 \,\Pi\, o$, quæ duæ æquationes inter ſe multiplicatæ propoſitam æquationem $+a^4-3a^3-1a^2-18 \,\Pi\, o$ reſtituunt.

Regula VIII[a], et ultima Authoris.

Propoſitâ quâlibet æquatione quadrimensâ, ſecundo termino carente, nimirum $+a^4.\ qa^2.\ ra.\ ſ \,\Pi\, o$, quærendus eſt valor hujus æquationis

$$+y^3 \left.\begin{array}{l} +\frac{qq}{+2r} \\ \frac{-2ſ}{+r} \end{array}\right\} yy - \tfrac{1}{2}qy + \tfrac{1}{4}r \,\Pi\, o.$$

Exemplum in Numeris.

Eſto ut in 2[a] regula $\begin{array}{l} +a^4 \\ \end{array} \begin{array}{l} -1a^2 \\ -q \end{array} \begin{array}{l} -2a \\ -r \end{array} \begin{array}{l} -1 \,\Pi\, o. \\ -ſ \end{array}$ Per hanc regulam fit $+y^3-\frac{5}{4}yy+\frac{1}{2}y-\frac{1}{4} \,\Pi\, o$, vel facto $\frac{e}{4} \,\Pi\, y$ oritur $+e^3-5e^2+8e-16 \,\Pi\, o$, & fit $+e \,\Pi\, +4$, & conſequenter $+y \,\Pi\, +1$, quod arguit propoſitam æquationem $+a^4-1a^2-2a-1 \,\Pi\, o$ è duabus bimenſis æquationibus compoſitam eſſe.

Primis quinque Regulis, ab Authoribus, quos nominavi, inventis duas ſequentes addere placuit, ut quælibet ęquatio quadrimenſa, quocumque tandem modo ſe ſe habeat, ſtatim, & abſque ulla pręparatione ad tertium gradum deprimi poſſit. Omnes autem hę Regulæ, ſi ultimam excipias, ab eodem inventionis fonte profi-

ciſcuntur. At ultima paulò reconditioris eſt originis, & in ea de induſtria omiſi quomodo cognita *y* poſſit haberi incognita ęquationis propoſitæ quantitas *a*, ut habeant artis periti in quo ſe exerceant, ſi fortè in hac inveſtigatione aliquam operam impendere velint.

. Nolo harum regularum cenſuram addere, alius enim erit eas examinandi locus: ſolùm adjungam unamquamlibet, adhibitâ priùs decenti præparatione infinitis modis ſolvi poſſe per eandem methodum. Verbi gratiâ

Propoſitâ quâlibet æquatione quadrimensâ, & completâ, nimirum $+a^4.\ pa^3.\ qa^2.\ ra.\ ſ\ \Pi\ o$, quærendus eſt valor hujus æquationis

$$\begin{array}{llll} +y^3 & +3my^2 & +3mmy & +m^3\ \Pi\ o \\ & +q & -2qm & -qm^2 \\ & & -4ſ & -4ſm \\ & & +pr & +prm \\ & & & -ppſ \\ & & & +4qſ \\ & & & -rr \end{array}$$

& habebitur

$$\left.\begin{array}{l} +aa \qquad +\tfrac{1}{2}p \\ +\sqrt{\tfrac{1}{4}pp+m-q+y} \end{array}\right\}\ a+\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}y\ \frac{+\tfrac{1}{2}py+\tfrac{1}{2}pm-r}{+2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp+m-q+y}}\ \Pi\ o$$

$$\text{Atque}\ \left.\begin{array}{l} +aa \qquad +\tfrac{1}{2}p \\ -\sqrt{\tfrac{1}{4}pp+m-q+y} \end{array}\right\}\ a+\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}y\ \frac{-\tfrac{1}{2}py-\tfrac{1}{2}pm+r}{+2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp+m-q+y}}\ \Pi$$

In quibus æquationibus litera *m* ad arbitrium limitabilis eſt, ſive pro litera *m* ſumi poteſt quævis quantitas ad libitum, & conſequenter modus habetur has æquationes infinitis modis ſolvendi. Idem ferto judicium de aliis Regulis, quæ ſic per eandem methodum conſtrui poſſunt, ut etiam infinitæ viæ pateant ad eas reſolvendas.

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Proponatur $+a^4+1a^3-9a^2+1a+2\ \Pi\ o$, & ſit $+m\ \Pi+1$, per traditam methodum fit

$$\begin{array}{llll} +y^3 & +3y^2 & +3y & +\ 1\ \Pi\ o. \\ & +9 & +18 & +\ 9 \\ & & -\ 8 & -\ 8 \\ & & +\ 1 & +\ 1 \\ & & & -\ 2 \\ & & & -72 \\ & & & -\ 1 \end{array}$$

Ideſt $y^3 + 12y^2 + 14y - 72\ \Pi\ o$,

& fit $+y\ \Pi - 4$, quod arguit propoſitam æquationem è duabus bimenſis æquationibus compoſitam eſſe, nam juxta methodi præceptum operando habebitur

$$\left.\begin{array}{l} +aa \qquad\qquad +\tfrac{1}{2} \\ \qquad +\sqrt{\tfrac{1}{4}+1+9-4} \end{array}\right\}\ a + \tfrac{1}{2} - 2\ \ \frac{-2+\tfrac{1}{2}-1}{+2\sqrt{\tfrac{1}{4}+1+9-4}}\ \Pi\ o$$

Ideſt $+aa + 3a - 2\ \Pi\ o$, & $+aa - 2a - 1\ \Pi\ o$, quæ duæ æquationes inter ſe multiplicatæ propoſitam æquationem $+a^4 + 1a^3 - 9a^2 + 1a + 2\ \Pi\ o$ efficiunt.

Ponatur jam $+m\ \Pi + 2$. Per traditam methodum fit

$$\begin{array}{llll} +y^3 & +6y^2 & +12y & +\ 8\ \Pi\ o, \\ & +9 & +36 & +36 \\ & & -\ 8 & -16 \\ & & +\ 1 & +\ 2 \\ & & & -\ 2 \\ & & & -72 \\ & & & -\ 1 \end{array}$$

Ideſt $+y^3 + 15y^2 + 41y - 45\ \Pi\ o$, & fit $+y\ \Pi - 5$, quod, ut priùs, arguit propoſitam æquationem è duabus bimenſis æquationibus compoſitam eſſe, nam juxta methodi præceptum operando habebitur

$$\left.\begin{array}{l} +aa \qquad\qquad +\tfrac{1}{2} \\ \qquad +\sqrt{\tfrac{1}{4}+2+9-5} \end{array}\right\}\ a - \tfrac{1}{2} + 1\ \ \frac{-\tfrac{1}{2}+1-1}{+2\sqrt{\tfrac{1}{4}+2+9-5}}\ \Pi\ o$$

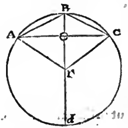
Ideſt $+a^2 + 3a - 2\ \Pi\ o$, & $+a^2 - 2a - 1\ \Pi\ o$, ut priùs.

CAPUT V.

De natura æquationum plures quàm quatuor dimenſiones habentium, & de illarum ſolutione.

HUjus capitis initio, quamvis locus eſſet, generalem æquationum ſupra quartum gradum evectarum conſtitutionem exponere non fert animus, neque enim hîc omnia dicere decrevi, ſed earum tantummodo æquationum naturam evolvam, quæ tam per meſolabum, quàm per anguli dati in aliquot partes æquales ſectionem reſolubiles ſunt. Itaque

PRIMA METHODUS UNIVERSALIS SIMPLICISSIMAS ANGULARIUM SECTIONUM ÆQUATIONES INVENIENDI.

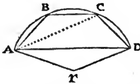


A B vel B $c \sqcap a$
A r vel B $r \sqcap r$
A $c \sqcap c$

ANALYSIS 1ª

$(\sqsubset d\,\mathrm{B}o \sqcap)\ 2r \times \mathrm{B}o \sqcap (\square\,\mathrm{AB} \sqcap)$ aa, Ergo $\frac{a}{2r} \sqcap \mathrm{B}o$, & $\frac{a^4}{4rr} \sqcap \square\,\mathrm{B}o$, Ergo $+aa - \frac{a^4}{4rr} \sqcap (\square\,\mathrm{A}o \sqcap) + \frac{1}{4}cc$.

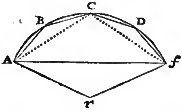
Quare $+a^4 - 4r^2a^2 + r^2c^2 \sqcap o$: Æquatio pro biſectione anguli.



A D $\sqcap d$

ANALYSIS 2ª

Ex probatis $(\square\,\mathrm{A}c \sqcap) + \frac{4r^2a^2 - a^4}{rr} \sqcap (\square\,\mathrm{AB} + \sqsubset \mathrm{AD} \times \mathrm{B}c \sqcap) + aa + ad$. Ergo $+a^3 - 3rra + rrd \sqcap o$. Æquatio pro triſectione anguli.



$A f \,\Pi\, f|$

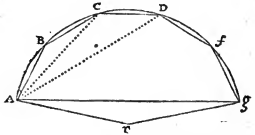
ANALYSIS 3ª

Per primam analyſim habetur

$$\frac{(4rr \times \square\, AC - \boxed{4}\, AC\,\Pi)}{rr} + \frac{16r^2a^2 - 4a^4}{rr}$$

$$- \frac{16r^4a^4 + 8r^2a^6 - a^8}{r^6}\,\Pi\,(\square\, A f\,\Pi) f^2.$$ Igitur

$+ a^8 - 8r^2a^6 + 20r^4a^4 - 16r^6a^2 + r^6 f^2 \,\Pi\, o.$ Æquatio pro ſectione anguli in in quatuor partes æquales.



$A g \,\Pi\, g|$

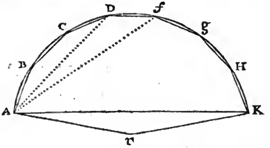
ANALYSIS 4ª

Per 2am analyſim $\frac{+ 3rra - a^3}{rr} \,\Pi\, AD.$ Ergo

$$\frac{+ 9r^4a^2 - 6r^2a^4 + a^6}{r^4}\,\Pi\,(\square\, AD \,\Pi\, \square\, Ac + \square CD$$

$$\times A g\,\Pi) \frac{+ 4r^2a^2 - a^4}{rr} + ag$$ Ergo $+ a^5 - 5r^2a^3 + 5r^4a$

$- r^4 g \,\Pi\, o.$ Æquatio pro ſectione anguli in quinque partes æquales.



AK Πk

ANALYSIS 5ª.

Per Analy. 3ᵃᵐ ($\square Af\Pi$) $\frac{+16r^6a^2 - 20r^4a^4 + 8r^2a^6 - a8}{r^6}\Pi$ ($\square AD + \square Df \times AK\Pi$) $\frac{+9r^4a^2 - 6r^2a^4 + a^6}{r^4} + ka$. Ergo $+a^7 - 7r^2a^6 + 14r^4a^3 - 7r^6a^2 + r^6k\,\Pi\,o$. Æquatio pro ſectione anguli in ſeptem partes æquales.

Atque ſic in infinitum progredi licet ad ſimpliciſſimas reliquarum angularium ſectionum æquationes inveniendas.

SECUNDA METHODUS UNIVERSALIS INVENIENDI ÆQUATIONES IN QUIBUSCUMQUE GRADIBUS PER MESOLABUM, SIVE PER ASSUMPTIONEM ALIQUOT MEDIARUM PROPORTIONALIUM INTER EXTREMAS COGNITAS RESOLUBILES.

IN IIIº GRADU.

Eſto 1º $+a\,\Pi + m + n$, & utramque partem $|\overline{\underline{\,3\,}}|$ᵈᵒ fit $+a^3\Pi + m^3 + n^3 (+3m^2n + 3mn^2\Pi) + 3mn \times (+m + n\,\Pi) + a$. Ergo $+a^3 - 3mna - {m^3 \atop n^3}\,\Pi\,o$.

Quare ſi ſit $+a^3 - qa - r\,\Pi\,o$, erit $+a$ ſumma duarum quantitatum $+m + n$, quarum productum $mn\,\Pi\,\frac{1}{3}q$; ſumma verò æquitrimenſorum ab ipſis nempe $+m^3 + n^3\,\Pi + r$.

Eſto 2º $+a\,\Pi + m - n$, & utramque partem $|\overline{\underline{\,3\,}}|$ᵈᵒ fit $+a^3$

$+a^3 \Pi +m^3 -n^3 (-3m^2n +3mn^2 \Pi) + 3mn \times (-m + n \Pi) - a$, ergo $+a^3 +3mna -m^3 \Pi o$.

$+n^3$

Quare ſi ſit $+a^3 +qa -r \Pi o$, erit a differentia duarum quantitatum $+m -n$, quarum productum $mn \Pi \frac{1}{3} q$, differentia verò æquitrimenſorum ab ipſis nempe $+m^3 -n^3 \Pi +r$.

EXEMPLUM I^um IN NUMERIS.

Eſto $+a^3 -6a -6 \Pi o$ fit $a \Pi +\sqrt[3]{4} +\sqrt[3]{2}$, quarum productum eſt $\frac{c}{1} \Pi 2$; ſumma verò æquitrimenſorum ab ipſis eſt 6.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS.

Eſto $+a^3 +6a -2 \Pi o$. fit $a \Pi \sqrt[3]{4} -\sqrt[3]{2}$, quarum productum eſt $\frac{c}{1} \Pi 2$ ut priùs, differentia verò æquitrimenſorum ab ipſis eſt 2.

IN IV. GRADU.

Eſto $+a \Pi +m +n$, & utramque partem $\boxed{4}^{do}$ fit $+a^4 \Pi +m^4 +n^4 +6m^2n^2 (+4m^3n +4mn^3 \Pi) +4mn \times (+m^2 +n^2 \Pi) +a^2 -2mn$. (Nam $+aa \Pi +m^2 +n^2 +2mn$), Ergo $+a^4 -4mna^2 -m^4 \Pi o$.

$-n^4$

$+2m^2n^2$

Sed hujuſmodi æquationes, in gradibus per pares numeros deſignatis conſiſtentes, ad inferiores gradus, quos parium medietates connotant, devolvuntur. Quocirca illas ad hos deſcendentes gradus, ad quos pertinent, remittimus.

IN V. GRADU.

Eſto $+a \Pi +m +n$, & utramque partem $\boxed{5}^{do}$ fit

$+a^5 \sqcap +m^5 +n^5$ $(+5m^4n +5mn^4 \sqcap)$ $+5mn \times (+m^3 +n^3 \sqcap) +a^3 -3mna(+10\,m^3n^2 +10\,m^2n^3 \sqcap) +10m^2n^2 \times (+m +n \sqcap) +a$. Igitur $+a^5 -5mna^3 +5m^2n^2a -m^5 \sqcap o$.
$-n^5$

Quare ſi ſit $+a^5 -qa^3 +ſa -t \sqcap o$, erit a ſumma duarum quantitatum $+m +n$, quarum productum eſt $\frac{1}{5}\,q$, ſumma verò æquiquinquimenſorum ab ipſis nempe $+m^5 +n^5 \sqcap +t$.

Eſto deinde $+a \sqcap +m -n$, & utramque partem $\boxed{5}$do fit $+a^5 \sqcap +m^5 -n^5$ $(-5m^4n +5mn^4 \sqcap)$ $+5mn \times (-m^3 +n^3 \sqcap) -a^3 -3mna$ $(+10\,m^3n^2 -10\,m^2n^3 \sqcap)$ $+10\,m^2n^2 \times (+m -n \sqcap) +a$. Ergo $+a^5 +5mna^3 +5m^2n^2a -m^5 \sqcap o$.
$+n^5$

Quare ſi ſit $+a^5 +qa^3 +ſa -t \sqcap o$, erit a differentia duarum quantitatum $+m -n$, quarum productum $mn \sqcap \frac{1}{5}\,q$; differentia verò æquiquinquimenſorum ab ipſis videlicet $+m^5 -n^5 \sqcap +t$.

EXEMPLUM 1um IN NUMERIS.

Eſto $+a^5 -10a^3 +20a -18 \sqcap o$, fit $a \sqcap +\sqrt[5]{16} +\sqrt[5]{2}$; quarum productum videlicet $\sqrt[5]{32} \sqcap 2$, ſumma verò æquiquinquimenſorum ab ipſis nempe $+m^5 +n^5 \sqcap +18$.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS.

Eſto $+a^5 +10a^3 +20a -4 \sqcap o$, fit $a \sqcap \sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{4}$ quarum productum nempe $\sqrt[5]{32} \sqcap \frac{10}{5}$ ſive 2, ut priùs; differentia verò æquiquinquimenſorum ab ipſis, videlicet $+m^5 -n^5 \sqcap +4$.

IN VII. GRADU.

Eſto $+a \sqcap +m +n$, & utramque partem $\boxed{7}$do fit $+a^7 \sqcap +m^7 +n^7$ $(+7m^6n +7mn^6 \sqcap) +7mn \times (+m^5 +n^5 \sqcap) +a^5 -5mna^3 +5m^2n^2a(+21\,m^5n^2 +21\,m^2n^5 \sqcap)$

$+ 21 m^2 n^2 \times (+ m^3 + n^3 \Pi) + a^3 - 3mna\ (+ 35 m^4 n^3 + 35 m^3 n^4) + 35 m^3 n^3 \times (+ m + n \Pi) + a$. Ergo $+ a^7 - 7mna^5 + 14m^2n^2a^3 - 7m^3n^3a - m^7 \Pi o.$
$\qquad - n^7$

Quare ſi ſit $+ a^7 - qa^5 + fa^3 - xa - z \Pi o$, erit a ſumma duarum quantitatum $+ m + n$, quarum productum nempe $mn \Pi \frac{1}{7} q$, ſumma verò æquiſeptimenſorum ab ipſis videlicet $+ m^7 + n^7 \Pi + z$.

Eſto deinde $+ a \Pi + n - n$, & utramque partem $\boxed{7}$ do fit $+ a^7 \Pi + m^7 - n^7\ (- 7m^6 n + 7mn^6 \Pi) + 7mn \times (- m^5 + n^5 \Pi) - a^5 - 5mna^3 - 5m^2n^2a\ (+ 21 m^5 n^2 - 21 m^2 n^5 \Pi) + 21 m^2 n^2 \times (+ m^3 - n^3 \Pi) + a^3 + 3mna\ (- 35 m^4 n^3 + 35 m^3 n^4 \Pi) + 35 m^3 n^3 \times (- m + n \Pi) - a$. Ergo $+ a^7 + 7mna^5 + 14m^2n^2a^3 + 7m^3n^3a - m^7 \Pi o.$
$\qquad + n^7$

Quare ſi ſit $+ a^7 + qa^5 + fa^3 + xa - z \Pi o$, erit a differentia duarum quantitatum $+ m - n$, quarum productum, nempe $mn \Pi \frac{1}{7} q$, differentia verò æquiſeptimenſorum ab ipſis, videlicet $+ m^7 - n^7 \Pi + z$.

EXEMPLUM 1um IN NUMERIS.

Eſto $+ a^7 - 14a^5 + 56a^3 - 56a - 66 \Pi o$, fit $a \Pi \sqrt[7]{64} + \sqrt[7]{2}$, quarum productum eſt $\sqrt[7]{128} \Pi \left(\frac{14}{7}\right) \Pi 2$; ſumma verò æquiſeptimenſorum ab ipſis eſt 66.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS.

Eſto $+ a^7 + 14a^5 + 56a^3 + 56a - 62 \Pi o$, fit $a \Pi \sqrt[7]{64} - \sqrt[7]{2}$ quarum productum eſt 2 ut priùs, differentia verò æquiſeptimenſorum ab ipſis eſt 62.

Digitized by Google

IN IX. GRADU.

Eſto $+a \Pi +m+n$, & utramque partem $|\overline{9}|^{do}$ fit $+a^9 \Pi +m^9 +n^9 (+9m^8n +9mn^8 \Pi) +9mn \times (+m^7 +n^7 \Pi) +a^7 - 7mna^5 + 14m^2n^2a^3 - 7m^3n^3a (+36m^7n^2 +36m^2n^7 \Pi) +36m^2n^2 \times (+m^5 +n^5 \Pi) +a^5 - 5mna^3 + 5m^2n^2a (+84m^6n^3 +84m^3n^6 \Pi) +84m^3n^3 \times (m^3 + n^3 \Pi) +a^3 - 3mna (+126m^5n^4 +126m^4n^5 \Pi) +126m^4n^4 \times (+m+n \Pi) +a$. Ergo $+a^9 - 9mna^7 +27m^2n^2a^5 - 30m^3n^3a^3 + 9m^4n^4a \begin{matrix} -m^9 \\ -n^9 \end{matrix} \Pi o$.

Quare ſi ſit $+a^9 - qa^7 + fa^5 - xa^3 + ca - d \Pi o$: Erit a ſumma duarum quantitatum $+m+n$, quarum productum nempe $+mn \Pi + \frac{1}{9}q$, ſumma verò æquinonimenſorum ab ipſis, videlicet $+m^9 + n^9 \Pi + d$.

Eſto deinde $+a \Pi +m-n$, & utramque partem $|\overline{9}|^{do}$ fit $+a^9 \Pi +m^9 -n^9 (-9m^8n +9mn^8 \Pi) +9mn \times (-m^7 +n^7 \Pi) -a^7 - 7mna^5 - 14m^2n^2a^3 - 7m^3n^3a (+36m^7n^2 -36m^2n^7 \Pi) +36m^2n^2 \times (+m^5 -n^5 \Pi) +a^5 - 5mna^3 +5m^2n^2a (-84m^6n^3 +84m^3n^6 \Pi) +84m^3n^3 \times (-m^3 +n^3 \Pi) -a^3 - 3mna (+126m^5n^4 -126m^4n^5 \Pi) +126m^4n^4 \times (+m-n \Pi) +a$. Ergo $+a^9 + 9mna^7 +27m^2n^2a^5 + 30m^3n^3a^3 + 9m^4n^4a \begin{matrix} -m^9 \\ +n^9 \end{matrix} \Pi o$.

Quare ſi ſit $+a^9 + qa^7 + fa^5 + xa^3 + ca - d \Pi o$: Erit a differentia duarum quantitatum $m+n$, quarum productum $mn \Pi \frac{1}{9}q$; differentia verò æquinonimenſorum ab ipſis, nempe $+m^9 - n^9 \Pi + d$.

EXEMPLUM I^um IN NUMERIS.

Eſto $+a^9 - 18a^7 + 108a^5 - 240a^3 + 144a - 48 \Pi o$.

Fit $a \Pi \sqrt[9]{32}| + \sqrt[9]{16}|$, quarum productum $\sqrt[9]{512}| \Pi 2$, ſumma verò æquinonimenſorum ab ipſis eſt $+48$.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS.

Eſto $+a^9+18a^7+108a^5+240a^3+144a-16\,\Pi\,o$. Fit $a\,\Pi\,\sqrt[9]{32}-\sqrt[9]{16}$, quarum productum $\sqrt[9]{512}\,\Pi\,2$, ut priùs; differentia verò æquinonimenſorum ab ipſis eſt $+16$.

IN XI. GRADU.

Eſto $+a\,\Pi+m+n$, & utramque partem $\boxed{11}^{do}$ fit $+a^{11}\,\Pi+m^{11}+n^{11}\,(+11m^{10}n+11mn^{10}\,\Pi)+11mn\times(+m^9+n^9\,\Pi)+a^9-9mna^7+27m^2n^2a^5-30m^3n^3a^3+9m^4n^4a\,(+55m^9n^2+55m^2n^9\,\Pi)+55m^2n^2\times(+m^7+n^7\,\Pi)+a^7-7mna^5+14m^2n^2a^3-7m^3n^3a\,(+165m^8n^3+165m^3n^8\,\Pi)+165m^3n^3\times(+m^5+n^5\,\Pi)+a^5-5mna^3+5m^2n^2a\,(+330m^7n^4+330m^4n^7\,\Pi)+330m^4n^4\times(+m^3+n^3\,\Pi)+a^3-3mna\,(+462m^6n^5+462m^5n^6\,\Pi)+462m^5n^5\times(+m+n\,\Pi)+a$. Ergo $+a^{11}-11mna^9+44m^2n^2a^7-77m^3n^3a^5+55m^4n^4a^3-11m^5n^5a-m^{11}-n^{11}\,\Pi\,o$.

Quare ſi ſit $+a^{11}-qa^9+ſa^7-xa^5+ca^3-fa-g\,\Pi\,o$, erit a ſumma duarum quantitatum $m+n$, quarum productum $mn\,\Pi\,\frac{1}{11}q$; ſumma verò æquiundecimenſorum ab ipſis, nimirum $+m^{11}+n^{11}\,\Pi+g$.

Eſto deinde $+a\,\Pi+m-n$, & utramque partem $\boxed{11}^{do}$ fit $+a^{11}\,\Pi+m^{11}-n^{11}\,(-11m^{10}n+11mn^{10}\,\Pi)+11mn\times(-m^9+n^9\,\Pi)-a^9-9mna^7-27m^2n^2a^5-30m^3n^3a^3-9m^4n^4a\,(+55m^9n^2-55m^2n^9\,\Pi)+55m^2n^2\times(+m^7-n^7\,\Pi)+a^7+7mna^5+14m^2n^2a^3+7m^3n^3a\,(-165m^8n^3+165m^3n^8\,\Pi)+165m^3n^3\times(-m^5+n^5\,\Pi)-a^5-5mna^3-5m^2n^2a\,(+330m^7n^4-330m^4n^7\,\Pi)+330m^4n^4\times(+m^3-n^3\,\Pi)+a^3+3mna\,(-462m^6n^5+462m^5n^6\,\Pi)+462m^5n^5\times(-m+n\,\Pi)-a$. Ergo $+a^{11}+11mna^9+44m^2n^2a^7+77m^3n^3a^5+55m^4n^4a^3+11m^5n^5a-m^{11}+n^{11}\,\Pi\,o$.

Quare ſi ſit $+a^{11}+qa^9+ſa^7+xa^5+ca^3+fa$

$-g \Pi o$, erit a differentia duarum quantitatum $+m - n$, quarum productum $mn \Pi \frac{1}{11} q$; differentia verò æquiundecimenſorum ab ipſis, videlicet $+m^{11} - n^{11} \Pi + g$.

EXEMPLUM 1um IN NUMERIS.

Eſto $+a^{11} - 22a^9 + 176a^7 - 616a^5 + 880a^3 - 352a - 96 \Pi o$, fit $a \Pi \sqrt[11]{64} + \sqrt[11]{32}$, quarum productum $\sqrt[11]{2048} \Pi 2$, ſumma verò æquiundecimenſorum ab ipſis eſt 96.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS.

Eſto $+a^{11} + 22a^9 + 176a^7 + 616a^5 + 880a^3 + 352a - 1022 \Pi o$, eſt $+a \Pi + \sqrt[11]{1024} - \sqrt[11]{2}$, quarum productum $\sqrt[11]{2048} \Pi 2$, ut priùs; differentia verò æquiundecimenſorum ab ipſis, eſt 1022.

Atque ſimili in infinitum progreſſu obtineri poſſunt reliquæ æquationes, quarum radices ſint ſumma, vel differentia duorum ſurdorum, in eodem cum æquationibus gradu exiſtentium.

TERTIA METHODUS UNIVERSALIS PRÆCEDENTES ÆQUATIONES EX MESOLABO ORTAS RESOLVENDI.

Hæc methodus non differt ab ea, quam in reſolutione trimenſarum æquationum, ab eodem meſolabo ortarum attigimus. Unde nihil aliud hîc agendum eſt quàm generalem hujus artis reſolutoriæ uſum in reſolvendis ejuſdem naturæ æquationibus, quarum videlicet radices per meſolabum explicantur, paucis oſtendere. Itaque.

Eſto $+a^5 - qa^3 + ſa - t \Pi o$. Per explicatam hujus æquationis geneſim agnoſcitur in ea intelligendas eſſe duas radices, quarum productum eſt $\frac{1}{5} q$, ſumma verò $\boxed{5}$orum ab ipſis eſt t.

Quare per præmiſſum Lemma fit $+tt - \frac{4}{3125} q^5 \Pi$ æquibimenſo differentiæ $\boxed{5}$orum, quorum ſumma eſt t, & conſequenter ipſorum ſemidifferentia eſt $+\sqrt{\frac{1}{4} tt - \frac{1}{3125} q^5}$,

Digitized by Google

quæ addita, vel dempta ab earum ſemiſumma, nempe $\frac{1}{2}t$, efficit $+\frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{1}{4}tt - \frac{1}{3125}q^5} \,|\, \Pi \,|\square|\, r$, & $+\frac{1}{2}t - \sqrt{\frac{1}{4}tt - \frac{1}{3125}q^5} \,|\, \Pi \,|\square|\,$ ꟼ. Quare ſumma radicum ab ipſis, ſive radix propoſitæ æquationis eſt

$$+\sqrt[5]{+\tfrac{1}{2}t + \sqrt{\tfrac{1}{4}tt - \tfrac{1}{3125}q^5}} + \sqrt[5]{+\tfrac{1}{2}t - \sqrt{\tfrac{1}{4}tt - \tfrac{1}{3125}q^5}} \;\Pi\; +a.$$

Eodem argumento concludetur ex æquatione $+a^7 - qa^5 + ſa^3 - xa - z \;\Pi\; o$ radicem eſſe

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[7]{+\frac{1}{2}z + \sqrt{\frac{1}{4}zz - \frac{1}{117649}q^7}} \\ +\sqrt[7]{+\frac{1}{2}z - \sqrt{\frac{1}{4}zz - \frac{1}{117649}q^7}} \end{array}\right\} \Pi\; +a.$$

& æquationis $+a^{11} - qa^9 + ſa^7 - xa^5 + ca^3 - fa - g \;\Pi\; o$ radicem eſſe

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[11]{\frac{1}{2}g + \sqrt{\frac{1}{4}gg - \frac{1}{285311670611}q^{11}}} \\ +\sqrt[11]{\frac{1}{2}g - \sqrt{\frac{1}{4}gg - \frac{1}{285311670611}q^{11}}} \end{array}\right\} \Pi\; +a.$$

Atque ſic in infinitum.

EXEMPLA IN NUMERIS.

PRIMUM.

Eſto ut in geneſi $+a^5 - 10a^3 + 20a - 18 \;\Pi\; o$. Hîc
$\qquad\qquad -q \qquad +ſ \qquad -t$

$+10 \;\Pi\; +q$ & $+18 \;\Pi\; +t$, ergo $+\frac{1}{5}q \;\Pi\; +2$ & $+\frac{1}{3125}q^5 \;\Pi\; +32$, quare per canonis leges fit

$$+\sqrt[5]{+9 + \sqrt{81 - 32}} + \sqrt[5]{+9 - \sqrt{81 - 32}} \;\Pi\; +a,$$

ideſt $+\sqrt[5]{16} + \sqrt[5]{2} \;\Pi\; +a$, ut in hujus æquationis geneſi monſtratum eſt.

SECUNDUM.

Eſto ut in geneſi $+a^7 - 14a^5 + 56a^3 - 56a - 66 \,\Pi\, o$.
$\qquad\qquad\qquad - q \quad + ſ \quad - x \quad - z$

Hîc $+14 \,\Pi\, + q$ & $z \,\Pi\, 66$, atque $\frac{1}{7} q \,\Pi\, 2$: nec non $\frac{+1}{117649} q^7 \,\Pi\, +128$. Quare per canonis leges fit

$$\left.\begin{matrix} +\sqrt[7]{+33+\sqrt{+1089-128}} \\ +\sqrt[7]{+33-\sqrt{+1089-128}} \end{matrix}\right\} \Pi + a;$$

Ideſt $+a \,\Pi\, +\sqrt[7]{64} + \sqrt[7]{2}$, ut in hujus æquationis geneſi monſtratum eſt.

TERTIUM.

Eſto ut in geneſi $+a^{11} - 22a^9 + 176a^7 - 616a^5$
$\qquad\qquad\qquad\qquad - q \quad + ſ \quad - x$
$+880a^3 - 352a - 96 \,\Pi\, o$. Hîc $+96 \,\Pi\, +g$, & $+22$
$+c \quad - f \quad - g$
$\Pi\, q$, atque $\frac{1}{11} q \,\Pi\, 2$, nec non $\frac{1}{285311670611} q^{11} \,\Pi\, +2048$.

Quare per canonis leges habetur

$$\left.\begin{matrix} +\sqrt[11]{+48+\sqrt{2304-2048}} \\ +\sqrt[11]{+48-\sqrt{2304-2048}} \end{matrix}\right\} \Pi + a.$$

Ideſt $+\sqrt[11]{64} + \sqrt[11]{32} \,\Pi\, a$, ut in hujus æquationis geneſi monſtratum eſt.

Eſto deinde $+a^5 + qa^3 + ſa - t \,\Pi\, o$. Per explicatam hujus æquationis geneſim agnoſcitur in ea intelligendas eſſe duas radices, quarum productum eſt $\frac{1}{5} q$, differentia verò $\boxed{5}$orum ab ipſis eſt $+t$.

Quare per præmiſſum lemma fit $+tt \frac{+4}{3125} q^5 \,\Pi\,$ æquibimenſo aggregati 2 $\boxed{5}$orum, unde ipſum aggregatum eſt $\sqrt{+}$

$\sqrt{+tt\frac{+4}{3125}q^5}$, cujus dimidium eſt $\sqrt{+\frac{1}{4}tt\frac{+1}{3125}q^5}$ cui addita, vel dempta ſemidifferentia ipſorum $\boxed{1}$ orum nempe $\frac{1}{2}t$ fit $+\frac{1}{2}t+\sqrt{\frac{1}{4}tt\frac{+1}{3125}q^5}\ \Pi\ \boxed{1}$ ꟸ, & $-\frac{1}{2}t+\sqrt{\frac{1}{4}tt\frac{+1}{3125}q^5}\ \Pi\ \boxed{1}$ ꞁ, differentia verò radicum ab ipſis, ſive radix propoſitæ æquationis eſt

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[5]{+\frac{1}{2}t+\sqrt{+\frac{1}{4}tt\frac{+1}{3125}q^5}} \\ -\sqrt[5]{-\frac{1}{2}t+\sqrt{\frac{1}{4}tt\frac{+1}{3125}q^5}} \end{array}\right\}\Pi+a.$$

Eodem argumento concludetur ex æquatione $+a^7+qa^5+fa^3+xa-z\,\Pi\,o$ radicem eſſe

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[7]{+\frac{1}{2}z+\sqrt{\frac{1}{4}zz\frac{+1}{117649}q^7}} \\ -\sqrt[7]{-\frac{1}{2}z+\sqrt{\frac{1}{4}zz\frac{+1}{117649}q^7}} \end{array}\right\}\Pi+a$$

& ex æquatione $+a^{11}+qa^9+fa^7+xa^5+ca^3+fa-g\,\Pi\,o$, radicem eſſe

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[11]{+\frac{1}{2}g+\sqrt{\frac{1}{4}gg\frac{+1}{285311670611}q^{11}}} \\ -\sqrt[11]{-\frac{1}{2}g+\sqrt{\frac{1}{4}gg\frac{+1}{285311670611}q^{11}}} \end{array}\right\}\Pi+a$$

& ſic in infinitum.

Digitized by Google

EXEMPLA IN NUMERIS.

PRIMUM.

Eſto $+a^5 \underset{+q}{+10a^3} \underset{+\text{ſ}}{+20a} \underset{-t}{-4} \,\Pi\, o$. Fit $+t \,\Pi\, 4$, & $+10 \,\Pi\, q$, quare $\frac{1}{5} q \,\Pi\, 2$, & per canonis leges habetur

$$+a \,\Pi\, +\sqrt[5]{+2+\sqrt{+4+32}} - \sqrt[5]{-2+\sqrt{+4+32}}.$$

Ideſt $\sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{4} \,\Pi\, a$ ut in hujus æquationis geneſi monſtratum eſt.

SECUNDUM.

Eſto $+a^7 \underset{+q}{+14a^5} \underset{+\text{ſ}}{+56a^3} \underset{+x}{+56a} \underset{-z}{-62} \,\Pi\, o$, Fit $z \,\Pi\, 62$ & $+14 \,\Pi\, +q$ atque $\frac{1}{7} q \,\Pi\, 2$. Quare per canonis leges habetur

$$+a \,\Pi\, +\sqrt[7]{+31+\sqrt{+961+128}} - \sqrt[7]{-31+\sqrt{+961+128}}$$

Ideſt $+\sqrt[7]{64} - \sqrt[7]{2} \,\Pi\, +a$, ut in hujus æquationis geneſi oſtenſum eſt.

TERTIUM.

Eſto $+a^{11} \underset{+q}{+22a^9} \underset{+\text{ſ}}{+176a^7} \underset{+x}{+616a^5} \underset{+c}{+880a^3} \underset{+f}{+352a} \underset{-g}{-1022} \,\Pi\, o$. Fit $1022 \,\Pi\, +g$, & $\frac{1}{11} q \,\Pi\, 2$. Quare per canonis leges habetur

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[11]{+511+\sqrt{261121+2048}} \\ -\sqrt[11]{-511+\sqrt{261121+2048}} \end{array}\right\} \Pi\, +a$$

Ideſt $\sqrt[11]{1024} - \sqrt[11]{2} \,\Pi\, a$, ut arguit hujus æquationis geneſis.

ALITER.

Eſto ut priùs $+a^5 + qa^3 + ſa - t \,\Pi\, o$. Ponatur $+e^5 \,\Pi\, \boxed{1}\, r$, ergo $+e^5 - t \,\Pi\, \boxed{1}\, \eta$, ut patet ex natura propoſitæ æquationis; & ex generali lemmate præmiſſo fit

$$\square\; \overline{2e^5 - t} \;\Pi\; +tt \frac{+4}{3125} q^5 \text{, ergo}$$

$$+\frac{1}{2}t + \sqrt[1]{\frac{1}{4}tt \frac{+1}{3125} q^5} \;\Pi\; +e^5 \text{. Ergo } +a \;\Pi$$

$$+\sqrt[5]{+\frac{1}{2}t + \sqrt[1]{\frac{1}{4}tt \frac{+1}{3125} q^5}} - \frac{\frac{1}{5}q}{\sqrt[5]{+\frac{1}{2}t + \sqrt[1]{\frac{1}{4}\; tt \frac{+1}{3125} q^5}}}$$

Eandem methodum ſequendo, reliquæ æquationes affectæ, & per meſolabum reſolubiles ad puras revocabuntur.

SCHOLIUM.

Quamvis hæ radicum extractiones ſuam habeant ex æquationum geneſi certitudinem, nihilominus tamen majoris claritatis ergo, illud idem diviſionis ope confirmabimus, quod uno, aut altero exemplo declaraſſe ſufficiet. Itaque brevitatis causâ poſito $+\sqrt[3]{16} \,|\, +\sqrt[3]{2} \,\Pi\, +m+n$, & mutando ubique $m\,n$ in ſuum valorem $+2$.

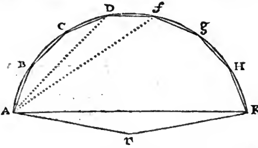
I[a]. ÆQUATIO DIVIDENDA.

$a^5.$	a^4	$-10a^3.$	a^2	$+20$	$-18a$	$\Pi\, o.$
o	$+m$	$+m^2$	$-6m$	$-4m^2$	$+4m$	
	$+n$	$+2$	$-6n$	-8	$+4n$	
	o	$+2$	$+m^3$	-8	$-2m^3$	
		$+n^2$	$+2m$	$-4n^2$	$-4m$	
		-6	$+2n$	$+m^4$	$-4n$	
		$+m^2$	$+n^3$	$+2m^2$	$-2n^3$	
		$+n2$	$-4m$	$+2n^2$	$+16$	
		o	$-4n$	$+n^4$	$+2m^3$	
			$+m^3$	$+4$	$+2n^3$	
			$+n^3$	$-2m^2$	$+2$	
			o	$-2n^2$	o	
				$+m^4$		
				$+n^4$		
				o		

DIVISOR.

$+a - m - n \;\Pi\; o.$

$+a^4$	$+ma^3$	$-6a^2$	$-4ma$	$+4$	$\Pi\, o.$
	$+n$	$+m^2$	$-4n$	$-2m^2$	
		$+n^2$	$+m^3$	$-2n^2$	
			$+n^3$	$+m^4$	
				$+n^4$	



AK Πk

ANALYSIS 5ª.

Per Analy. 3ᵃᵐ ($\square A f \Pi$) $+\dfrac{16r^6a^2 - 20r^4a^4 + 8r^2a^6 - a^8}{r^6} \Pi$

($\square AD + \square Df \times AK \Pi$) $+\dfrac{9r^4a^2 - 6r^2a^4 + a^6}{r^4} + ka$. Ergo

$+a^7 - 7r^2a^6 + 14r^4a^3 - 7r^6a^2 + r^6 k \Pi o$. Æquatio pro ſectione anguli in ſeptem partes æquales.

Atque ſic in infinitum progredi licet ad ſimpliciſſimas reliquarum angularium ſectionum æquationes inveniendas.

SECUNDA METHODUS UNIVERSALIS INVENIENDI ÆQUATIONES IN QUIBUSCUMQUE GRADIBUS PER MESOLABUM, SIVE PER ASSUMPTIONEM ALIQUOT MEDIARUM PROPORTIONALIUM INTER EXTREMAS COGNITAS RESOLUBILES.

IN IIIº GRADU.

Eſto 1º $+a \Pi + m + n$, & utramque partem $\boxed{1}$ᵈᵒ ſit $+a^3 \Pi + m^3 + n^3 (+3m^2n + 3mn^2 \Pi) + 3mn \times (+m + n \Pi) + a$. Ergo $+a^3 - 3mna - {m^3 \atop -n^3} \Pi o$.

Quare ſi ſit $+a^3 - qa - r \Pi o$, erit $+a$ ſumma duarum quantitatum $+m + n$, quarum productum $mn \Pi \frac{1}{3}q$; ſumma verò æquitrimenſorum ab ipſis nempe $+m^3 + n^3 \Pi + r$.

Eſto 2º $+a \Pi + m - n$, & utramque partem $\boxed{1}$ᵈᵒ ſit $+a^3$

$+a^3 \,\Pi\, +m^3 - n^3 (-3m^2n + 3mn^2 \,\Pi) + 3mn \times (-m + n \,\Pi) - a$, ergo $+a^3 + 3mna - m^3 \,\Pi\, o.$
$$+n^3$$

Quare ſi ſit $+a^3 + qa - r \,\Pi\, o$, erit a differentia duarum quantitatum $+m - n$, quarum productum $mn \,\Pi\, \frac{1}{3} q$, differentia verò æquitrimenſorum ab ipſis nempe $+m^3 - n^3 \,\Pi\, +r$.

EXEMPLUM I^{um} IN NUMERIS.

Eſto $+a^3 - 6a - 6 \,\Pi\, o$ fit $a \,\Pi\, +\sqrt[3]{4|} + \sqrt[3]{2|}$, quarum productum eſt $\frac{6}{3} \,\Pi\, 2$; ſumma verò æquitrimenſorum ab ipſis eſt 6.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS.

Eſto $+a^3 + 6a - 2 \,\Pi\, o$. fit $a \,\Pi\, \sqrt[3]{4|} - \sqrt[3]{2|}$, quarum productum eſt $\frac{6}{3} \,\Pi\, 2$ ut priùs, differentia verò æquitrimenſorum ab ipſis eſt 2.

IN IV. GRADU.

Eſto $+a \,\Pi\, +m + n$, & utramque partem $\boxed{4}^{do}$ fit $+a^4 \,\Pi\, +m^4 + n^4 + 6m^2n^2 (+4m^3n + 4mn^3 \,\Pi) + 4mn \times (+m^2 + n^2 \,\Pi) + a^2 - 2mn$. (Nam $+aa \,\Pi\, +m^2 + n^2 + 2mn$), Ergo $+a^4 - 4mna^2 - m^4 \,\Pi\, o.$
$$-n^4$$
$$+2m^2n^2$$

Sed hujuſmodi æquationes, in gradibus per pares numeros deſignatis conſiſtentes, ad inferiores gradus, quos parium medietates connotant, devolvuntur. Quocirca illas ad hos deſcendentes gradus, ad quos pertinent, remittimus.

IN V. GRADU.

Eſto $+a \,\Pi\, +m + n$, & utramque partem $\boxed{\;}^{do}$ fit

$+a^5 \,\Pi\, +m^5 +n^5$ $(+5m^4n +5mn^4 \,\Pi\,)$ $+5mn \times$ $(+m^3$ $+n^3 \,\Pi)$ $+a^3 -3mna$ $(+10\,m^3n^2 +10\,m^2n^3 \,\Pi)$ $+10m^2n^2 \times$ $(+m +n \,\Pi)$ $+a$. Igitur $+a^5 -5mna^3 +5m^2n^2a -m^5 \,\Pi\, o.$
$-n^5$

Quare ſi ſit $+a^5 -qa^3 +ſa -t \,\Pi\, o$, erit a ſumma duarum quantitatum $+m +n$, quarum productum eſt $\frac{1}{5}\,q$, ſumma verò æquiquinquimenſorum ab ipſis nempe $+m^5$ $+n^5 \,\Pi\, +t$.

Eſto deinde $+a \,\Pi\, +m -n$, & utramque partem $\lvert\overline{5}\rvert^{do}$ fit $+a^5 \,\Pi\, +m^5 -n^5$ $(-5m^4n +5mn^4 \,\Pi\,)$ $+5mn \times$ $(-m^3$ $+n^3 \,\Pi\,)$ $-a^3 -3mna$ $(+10\,m^3n^2 -10\,m^2n^3 \,\Pi\,)$ $+10\,m^2n^2 \times$ $(+m -n \,\Pi)$ $+a$. Ergo $+a^5 +5mna^3 +5m^2n^2a -m^5 \,\Pi\, o.$
$+n^5$

Quare ſi ſit $+a^5 +qa^3 +ſa -t \,\Pi\, o$, erit a differentia duarum quantitatum $+m -n$, quarum productum mn $\Pi \frac{1}{5}\,q$; differentia verò æquiquinquimenſorum ab ipſis videlicet $+m^5 -n^5 \,\Pi\, +t$.

EXEMPLUM I^um IN NUMERIS.

Eſto $+a^5 -10a^3 +20a -18 \,\Pi\, o$, fit $a \,\Pi\, +\sqrt[5]{16}\rvert +\sqrt[5]{2}\rvert$; quarum productum videlicet $\sqrt[5]{32}\rvert \,\Pi\, 2$, ſumma verò æquiquinquimenſorum ab ipſis nempe $+m^5 +n^5 \,\Pi\, +18$.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS.

Eſto $+a^5 +10a^3 +20a -4 \,\Pi\, o$, fit $a \,\Pi\, \sqrt[5]{8}\rvert - \sqrt[5]{4}\rvert$ quarum productum nempe $\sqrt[5]{32}\rvert \,\Pi\, \frac{10}{5}$ ſive 2, ut priùs; differentia verò æquiquinquimenſorum ab ipſis, videlicet $+m^5 -n^5 \,\Pi\, +4$.

IN VII. GRADU.

Eſto $+a \,\Pi\, +m +n$, & utramque partem $\lvert\overline{7}\rvert^{do}$ fit $+a^7 \,\Pi\, +m^7 +n^7$ $(+7m^6n +7mn^6 \,\Pi)$ $+7mn \times$ $(+m^5$ $+n^5 \,\Pi\,)$ $+a^5 -5mna^3 +5m^2n^2a$ $(+21\,m^5n^2 +21\,m^2n^5 \,\Pi)$

Digitized by Google

$+ 21 m^2 n^2 \times (+ m^3 + n^3 \Pi) + a^3 - 3mna\ (+ 35m^4 n^3 + 35 m^3 n^4) + 35 m^3 n^3 \times (+ m + n \Pi) + a$. Ergo $+ a^7 - 7mna^5 + 14m^2 n^2 a^3 - 7m^3 n^3 a - m^7 \Pi o.$

$$- n^7$$

Quare ſi ſit $+ a^7 - qa^5 + ſa^3 - xa - z \Pi o$, erit a ſumma duarum quantitatum $+ m + n$, quarum productum nempe $mn \Pi \frac{1}{7} q$, ſumma verò æquiſeptimenſorum ab ipſis videlicet $+ m^7 + n^7 \Pi + z$.

Eſto deinde $+ a \Pi + n. - n$, & utramque partem $|\overline{\underline{7}}|^{do}$ fit $+ a^7 \Pi + m^7 - n^7\ (- 7m^6 n + 7mn^6 \Pi) + 7mn \times (- m^5 + n^5 \Pi) - a^5 - 5mna^3 - 5m^2 n^2 a\ (+ 21 m^5 n^2 - 21 m^2 n^5 \Pi) + 21 m^2 n^2 \times (+ m^3 - n^3 \Pi) + a^3 + 3mna\ (- 35m^4 n^3 + 35m^3 n^4 \Pi) + 35m^3 n^3 \times (- m + n \Pi) - a$. Ergo $+ a^7 + 7mna^5 + 14m^2 n^2 a^3 + 7m^3 n^3 a - m^7 \Pi o.$

$$+ n^7$$

Quare ſi ſit $+ a^7 + qa^5 + ſa^3 + xa - z \Pi o$, erit a differentia duarum quantitatum $+ m - n$, quarum productum, nempe $mn \Pi \frac{1}{7} q$, differentia verò æquiſeptimenſorum ab ipſis, videlicet $+ m^7 - n^7 \Pi + z$.

EXEMPLUM 1um IN NUMERIS.

Eſto $+ a^7 - 14a^5 + 56a^3 - 56a - 66 \Pi o$, fit $a \Pi \sqrt[7]{64}| + \sqrt[7]{2}|$, quarum productum eſt $\sqrt[7]{128}| \Pi \left(\frac{14}{7}\right) \Pi 2$; ſumma verò æquiſeptimenſorum ab ipſis eſt 66.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS.

Eſto $+ a^7 + 14a^5 + 56a^3 + 56a - 62 \Pi o$, fit $a \Pi \sqrt[7]{64}| - \sqrt[7]{2}|$ quarum productum eſt 2 ut priùs, differentia verò æquiſeptimenſorum ab ipſis eſt 62.

Digitized by Google

IN IX. GRADU.

Eſto $+a \Pi +m +n$, & utramque partem $\boxed{9}^{do}$ fit $+a^9$ $\Pi +m^9 +n^9 (+9m^8n +9mn^8 \Pi) +9mn \times (+m^7 +n^7 \Pi)$ $+a^7 - 7mna^5 + 14 m^2n^2a^3 - 7m^3n^3a\ (+36m^7n^2$ $+36 m^2n^7 \Pi) + 36m^2n^2 \times (+m^5 +n^5 \Pi) +a^5$ $-5mna^3 +5m^2n^2a\ (+84m^6n^3 +84m^3n^6 \Pi) +84m^3n^3$ $\times (m^3 +n^3 \Pi) +a^3 -3mna\ (+126m^5n^4 +126m^4n^5 \Pi)$ $+126m^4n^4 \times (+m +n \Pi) + a$. Ergo $+a^9 - 9mna^7$ $+27 m^2n^2a^5 - 30m^3n^3a^3 + 9m^4n^4a - m^9 \Pi o.$

$-n^9$

Quare ſi ſit $+a^9 - qa^7 + fa^5 - xa^3 + ca - d \Pi o$: Erit a ſumma duarum quantitatum $+m+n$, quarum productum nempe $+mn \Pi + \frac{1}{9}q$, ſumma verò æquinonimenſorum ab ipſis, videlicet $+m^9 +n^9 \Pi + d$.

Eſto deinde $+a \Pi +m -n$, & utramque partem $\boxed{9}^{do}$ fit $+a^9 \Pi +m^9 -n^9 (-9m^8n +9mn^8 \Pi) +9mn$ $\times (-m^7 +n^7 \Pi) - a^7 - 7mna^5 - 14m^2n^2a^3 - 7m^3n^3a$ $(+36m^7n^2 - 36m^2n^7 \Pi) + 36m^2n^2 \times (+m^5 - n^5 \Pi) + a^5$ $-5mna^3 +5m^2n^2a (-84m^6n^3 +84 m^3n^6 \Pi) + 84 m^3n^3 \times$ $(-m^3 + n^3 \Pi) - a^3 - 3mna\ (+126m^5n^4 - 126m^4n^5 \Pi)$ $+126m^4n^4 \times (+m -n \Pi) + a$. Ergo $+a^9 + 9mna^7$ $+27 m^2n^2a^5 + 30 m^3n^3a^3 + 9m^4n^4a - m^9 \Pi o.$

$+n^9$

Quare ſi ſit $+a^9 + qa^7 + fa^5 + xa^3 + ca - d \Pi o$: Erit a differentia duarum quantitatum $m+n$, quarum productum $mn \Pi \frac{1}{9}q$; differentia verò æquinonimenſorum ab ipſis, nempe $+m^9 - n^9 \Pi + d$.

EXEMPLUM I^um IN NUMERIS.

Eſto $+a^9 - 18a^7 + 108a^5 - 240a^3 + 144a - 48 \Pi o$.

Fit $a \Pi \sqrt[9]{32} + \sqrt[9]{16}$, quarum productum $\sqrt[9]{512} \Pi 2$, ſumma verò æquinonimenſorum ab ipſis eſt $+48$.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS.

Eſto $+a^9 + 18a^7 + 108a^5 + 240a^3 + 144a - 16 \Pi o$. Fit $a \Pi \sqrt[9]{32} - \sqrt[9]{16}$, quarum productum $\sqrt[9]{512} \Pi 2$, ut priùs; differentia verò æquinonimenſorum ab ipſis eſt $+16$.

IN XI. GRADU.

Eſto $+a \Pi +m +n$, & utramque partem $|\overline{\underline{11}}|^{do}$ fit $+a^{11} \Pi + m^{11} + n^{11} (+11m^{10}n + 11mn^{10} \Pi) + 11mn \times (+n^9 + n^9 \Pi) + a^9 - 9mna^7 + 27m^2n^2a^5 - 30m^3n^3a^3 + 9m^4n^4a (+55m^9n^2 + 55m^2n^9 \Pi) + 55m^2n^2 \times (+m^7 + n^7 \Pi) + a^7 - 7mna^5 + 14m^2n^2a^3 - 7m^3n^3a (+165m^8n^3 + 165m^3n^8 \Pi) + 165m^3n^3 \times (+m^5 + n^5 \Pi) + a^5 - 5mna^3 + 5m^2n^2a (+330m^7n^4 + 330m^4n^7 \Pi) + 330m^4n^4 \times (+m^3 + n^3 \Pi) + a^3 - 3mna (+462m^6n^5 + 462m^5n^6 \Pi) + 462m^5n^5 \times (+m + n \Pi) + a$. Ergo $+a^{11} - 11mna^9 + 44m^2n^2a^7 - 77m^3n^3a^5 + 55m^4n^4a^3 - 11m^5n^5a - m^{11} \Pi o$.
$-n^{11}$

Quare ſi ſit $+a^{11} - qa^9 + ſa^7 - xa^5 + ca^3 - fa - g \Pi o$, erit a ſumma duarum quantitatum $m + n$, quarum productum $mn \Pi \frac{1}{11} q$; ſumma verò æquiundecimenſorum ab ipſis, nimirum $+m^{11} + n^{11} \Pi + g$.

Eſto deinde $+a \Pi +m - n$, & utramque partem $|\overline{\underline{11}}|^{do}$ fit $+a^{11} \Pi + m^{11} - n^{11} (-11m^{10}n + 11mn^{10} \Pi) + 11mn \times (-m^9 + n^9 \Pi) - a^9 - 9mna^7 - 27m^2n^2a^5 - 30m^3n^3a^3 - 9m^4n^4a (+55m^9n^2 - 55m^2n^9 \Pi) + 55m^2n^2 \times (+m^7 - n^7 \Pi) + a^7 + 7mna^5 + 14m^2n^2a^3 + 7m^3n^3a (-165m^8n^3 + 165m^3n^8 \Pi) + 165m^3n^3 \times (-m^5 + n^5 \Pi) - a^5 - 5mna^3 - 5m^2n^2a (+330m^7n^4 - 330m^4n^7 \Pi) + 330m^4n^4 \times (+m^3 - n^3 \Pi) + a^3 + 3mna (-462m^6n^5 + 462m^5n^6 \Pi) + 462m^5n^5 \times (-m + n \Pi) - a$. Ergo $+a^{11} + 11mna^9 + 44m^2n^2a^7 + 77m^3n^3a^5 + 55m^4n^4a^3 + 11m^5n^5a - m^{11} \Pi o$.
$+n^{11}$

Quare ſi ſit $+a^{11} + qa^9 + ſa^7 + xa^5 + ca^3 + fa$

$-g \,\Pi\, o$, erit a differentia duarum quantitatum $+m - n$, quarum productum $mn \,\Pi\, \frac{1}{11} q$; differentia verò æquiundecimenſorum ab ipſis, videlicet $+m^{11} - n^{11} \,\Pi\, +g$.

EXEMPLUM 1um IN NUMERIS.

Eſto $+a^{11} - 22a^9 + 176a^7 - 616a^5 + 880a^3 - 352a - 96 \,\Pi\, o$, fit $a \,\Pi\, \sqrt[11]{64} + \sqrt[11]{32}$, quarum productum $\sqrt[11]{2048}$ $\Pi\, 2$, ſumma verò æquiundecimenſorum ab ipſis eſt 96.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS.

Eſto $+a^{11} + 22a^9 + 176a^7 + 616a^5 + 880a^3 + 352a - 1022 \,\Pi\, o$, eſt $+a \,\Pi\, +\sqrt[11]{1024} - \sqrt[11]{2}$, quarum productum $\sqrt[11]{2048} \,\Pi\, 2$, ut priùs; differentia verò æquiundecimenſorum ab ipſis, eſt 1022.

Atque ſimili in infinitum progreſſu obtineri poſſunt reliquæ æquationes, quarum radices ſint ſumma, vel differentia duorum ſurdorum, in eodem cum æquationibus gradu exiſtentium.

TERTIA METHODUS UNIVERSALIS PRÆCEDENTES ÆQUATIONES EX MESOLABO ORTAS RESOLVENDI.

Hæc methodus non differt ab ea, quam in reſolutione trimenſarum æquationum, ab eodem meſolabo ortarum attigimus. Unde nihil aliud hîc agendum eſt quàm generalem hujus artis reſolutoriæ uſum in reſolvendis ejuſdem naturæ æquationibus, quarum videlicet radices per meſolabum explicantur, paucis oſtendere. Itaque.

Eſto $+a^5 - qa^3 + ſa - t \,\Pi\, o$. Per explicatam hujus æquationis geneſim agnoſcitur in ea intelligendas eſſe duas radices, quarum productum eſt $\frac{1}{5} q$, ſumma verò $\boxed{5}$orum ab ipſis eſt t.

Quare per præmiſſum Lemma fit $+tt - \frac{4}{3125} q^5 \,\Pi\,$ æquibimenſo differentiæ $\boxed{5}$orum, quorum ſumma eſt t, & conſequenter ipſorum ſemidifferentia eſt $+\sqrt{\frac{1}{4} tt - \frac{1}{3125} q^5}$,

quæ addita, vel dempta ab earum ſemiſumma, nempe $\frac{1}{2}t$, efficit $+\frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{1}{4}tt - \frac{1}{3125}q^5} \;\Pi\; \square\; r$, & $+\frac{1}{2}t - \sqrt{\frac{1}{4}tt - \frac{1}{3125}q^5} \;\Pi\; \square\; \urcorner$. Quare ſumma radicum ab ipſis, ſive radix propoſitæ æquationis eſt

$$+\sqrt[5]{+\frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{1}{4}tt - \frac{1}{3125}q^5}} + \sqrt[5]{+\frac{1}{2}t - \sqrt{\frac{1}{4}tt - \frac{1}{3125}q^5}} \;\Pi\; +a.$$

Eodem argumento concludetur ex æquatione $+a^7 - qa^5 + fa^3 - xa - z \;\Pi\; o$ radicem eſſe

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[7]{+\frac{1}{2}z + \sqrt{\frac{1}{4}zz - \frac{1}{117649}q^7}} \\ +\sqrt[7]{+\frac{1}{2}z - \sqrt{\frac{1}{4}zz - \frac{1}{117649}q^7}} \end{array}\right\} \Pi + a.$$

& æquationis $+a^{11} - qa^9 + fa^7 - xa^5 + ca^3 - fa - g \;\Pi\; o$ radicem eſſe

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[11]{\frac{1}{2}g + \sqrt{\frac{1}{4}gg - \frac{1}{285311670611}q^{11}}} \\ +\sqrt[11]{\frac{1}{2}g - \sqrt{\frac{1}{4}gg - \frac{1}{285311670611}q^{11}}} \end{array}\right\} \Pi + a.$$

Atque ſic in infinitum.

Exempla in Numeris.

Primum.

Eſto ut in geneſi $+a^5 - 10a^3 + 20a - 18 \;\Pi\; o$. Hîc

$$\begin{array}{lll} -q & +f & -t \end{array}$$

$+10 \;\Pi\; +q$ & $+18 \;\Pi\; +t$, ergo $+\frac{1}{5}q \;\Pi\; +2$ & $+\frac{1}{3125}q^5 \;\Pi\; +32$, quare per canonis leges fit

$$+\sqrt[5]{+9 + \sqrt{81 - 32}} + \sqrt[5]{+9 - \sqrt{81 - 32}} \;\Pi\; +a,$$

ideſt $+\sqrt[5]{16} + \sqrt[5]{2} \;\Pi\; +a$, ut in hujus æquationis geneſi monſtratum eſt.

$\sqrt{+tt\frac{+4}{3125}q^5}$, cujus dimidium eſt $\sqrt{+\frac{1}{4}tt\frac{+1}{3125}q^5}$ cui addita, vel dempta ſemidifferentia ipſorum $\boxed{1}$orum nempe $\frac{1}{2}t$ fit $+\frac{1}{2}t+\sqrt{\frac{1}{4}tt\frac{+1}{3125}q^5}\ \Pi\ \boxed{1}\pi$, & $-\frac{1}{2}t+\sqrt{\frac{1}{4}tt\frac{+1}{3125}q^5}\ \Pi\ \boxed{1}\Pi$, differentia verò radicum ab ipſis, ſive radix propoſitæ æquationis eſt

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[5]{+\frac{1}{2}t+\sqrt{+\frac{1}{4}tt\frac{+1}{3125}q^5}} \\ -\sqrt[5]{-\frac{1}{2}t+\sqrt{\frac{1}{4}tt\frac{+1}{3125}q^5}} \end{array}\right\}\Pi + a.$$

Eodem argumento concludetur ex æquatione $+a^7+qa^5+fa^3+xa-z\,\Pi\,o$ radicem eſſe

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[7]{+\frac{1}{2}z+\sqrt{\frac{1}{4}zz\frac{+1}{117649}q^7}} \\ -\sqrt[7]{-\frac{1}{2}z+\sqrt{\frac{1}{4}zz\frac{+1}{117649}q^7}} \end{array}\right\}\Pi + a$$

& ex æquatione $+a^{11}+qa^9+fa^7+xa^5+ca^3+fa-g\,\Pi\,o$, radicem eſſe

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[11]{+\frac{1}{2}g+\sqrt{\frac{1}{4}gg\frac{+1}{285311670611}q^{11}}} \\ -\sqrt[11]{-\frac{1}{2}g+\sqrt{\frac{1}{4}gg\frac{+1}{285311670611}q^{11}}} \end{array}\right\}\Pi + a$$

& ſic in infinitum.

Digitized by Google

EXEMPLA IN NUMERIS.

PRIMUM.

Eſto $+a^5 + 10a^3 + 20a - 4 \Pi o$. Fit $+t \Pi 4$, &
$\qquad +q \quad +ſ \quad -t$
$+10 \Pi q$, quare $\frac{1}{5} q \Pi 2$, & per canonis leges habetur

$$+a \Pi + \sqrt[5]{+2+\sqrt{+4+32}} - \sqrt[5]{-2+\sqrt{+4+32}}.$$

Ideſt $\sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{4} \Pi a$ ut in hujus æquationis geneſi monſtratum eſt.

SECUNDUM.

Eſto $+a^7+14a^5+56a^3+56a-62\Pi o$, Fit $z\Pi 62$ & $+14\Pi$
$\qquad +q \quad +ſ \quad +x \quad -z$
$+q$ atque $\frac{1}{7} q \Pi 2$. Quare per canonis leges habetur

$$+a\Pi+\sqrt[7]{+31+\sqrt{+961+128}} - \sqrt[7]{-31+\sqrt{+961+128}}$$

Ideſt $+\sqrt[7]{64} - \sqrt[7]{2} \Pi + a$, ut in hujus æquationis geneſi oſtenſum eſt.

TERTIUM.

Eſto $+a^{11} + 22a^9 + 176a^7 + 616a^5 + 880a^3$
$\qquad +q \quad +ſ \quad +x \quad +c$

$+352a - 1022\Pi o$. Fit $1022\Pi+g$, & $\frac{1}{11} q \Pi 2$. Quare
$+f \quad -g$
per canonis leges habetur

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[11]{+511+\sqrt{261121+2048}} \\ -\sqrt[11]{-511+\sqrt{261121+2048}} \end{array}\right\} \Pi+a$$

Ideſt $\sqrt[11]{1024} - \sqrt[11]{2} \Pi a$, ut arguit hujus æquationis geneſis.

Digitized by Google

ALITER.

Eſto ut priùs $+a^5 + qa^3 + ſa - t\,\Pi\,o$. Ponatur $+e^5$ $\Pi\,|\boxed{\,\cdot\,}|\,r$, ergo $+e^5 - t\,\Pi\,|\boxed{\,\cdot\,}|\,\eta$, ut patet ex natura propoſitæ æquationis; & ex generali lemmate præmiſſo fit

$$\square\ \overline{2e^5 - t}\,|\ \Pi + tt\frac{+4}{3125}q^5,$$ ergo

$$+\frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{1}{4}tt\frac{+1}{3125}q^5}\ \Big|\ \Pi + e^5.$$ Ergo $+a\,\Pi$

$$+\sqrt[5]{+\frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{1}{4}tt\frac{+1}{3125}q^5}} - \frac{\frac{1}{5}q}{\sqrt[5]{+\frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{1}{4}tt\frac{+1}{3125}q^5}}}$$

Eandem methodum ſequendo, reliquæ æquationes affectæ, & per meſolabum reſolubiles ad puras revocabuntur.

SCHOLIUM.

Quamvis hæ radicum extractiones ſuam habeant ex æquationum geneſi certitudinem, nihilominus tamen majoris claritatis ergo, illud idem diviſionis ope confirmabimus, quod uno, aut altero exemplo declaraſſe ſufficiet. Itaque brevitatis causâ poſito $+\sqrt[5]{16}\,| + \sqrt[5]{2}\,|\ \Pi$ $+m+n$, & mutando ubique $m\,n$ in ſuum valorem $+2$.

I^a ÆQUATIO DIVIDENDA.

$a^5.$	a^4	$-10a^3.$	a^2	$+20$	$-18a$	$\Pi\,o$
———	$+m$	$+m^2$	$-6m$	$-4m^2$	$+4m$	
0	$+n$	$+2$	$-6n$	-8	$+4n$	
	———	$+2$	$+m^3$	-8	$-2m^3$	
	0	$+n^2$	$+2m$	$-4n^2$	$-4m$	
		———	$+2n$	$+m^4$	$-4n$	
		-6	$+n^3$	$+2m^2$	$-2n^3$	
		$+m^2$	———	$+2n^2$	$+16$	
		$+n^2$	$-4m$	$+n^4$	$+2m^3$	
		———	$-4n$	———	$+2n^3$	
		0	$+m^3$	$+4$	$+2$	
			$+n^3$	$-2m^2$	———	
			———	$-2n^2$	0	
			0	$+m^4$		
				$+n^4$		
				———		
				0		

DIVISOR.

$+a - m - n\ \Pi\,o.$

$+a^4$	$+ma^3$	$-6a^2$	$-4ma$	$+4$	$\Pi\,o.$
	$+n$	$+m^2$	$-4n$	$-2m^2$	
		$+n^2$	$+m^3$	$-2n^2$	
			$+n^3$	$+m^4$	
				$+n^4$	

ALITER.

Eſto ut priùs $+a^5 + qa^3 + ſa - t \,\Pi\, 0$. Ponatur $+e^5 \,\Pi\, \boxed{1}\, r$, ergo $+e^5 - t \,\Pi\, \boxed{1}\, q$, ut patet ex natura propoſitæ æquationis; & ex generali lemmate præmiſſo fit

$$\square\, \overline{2e^5 - t} \,\Pi + tt \frac{+4}{3125} q^5, \text{ ergo}$$

$$+\frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{1}{4}tt \frac{+1}{3125} q^5} \;\Pi + e^5. \text{ Ergo } + a \,\Pi$$

$$+\sqrt[5]{+\frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{1}{4}tt \frac{+1}{3125} q^5}} - \frac{\frac{1}{5}q}{\sqrt[5]{+\frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{1}{4}tt \frac{+1}{3125} q^5}}}$$

Eandem methodum ſequendo, reliquæ æquationes affectæ, & per meſolabum reſolubiles ad puras revocabuntur.

SCHOLIUM.

Quamvis hæ radicum extractiones ſuam habeant ex æquationum geneſi certitudinem, nihilominus tamen majoris claritatis ergo, illud idem diviſionis ope confirmabimus, quod uno, aut altero exemplo declaraſſe ſufficiet. Itaque brevitatis causâ poſito $+\sqrt[5]{16} + \sqrt[5]{2} \,\Pi + m + n$, & mutando ubique $m\, n$ in ſuum valorem $+2$.

I^a. ÆQUATIO DIVIDENDA.

a^5.	a^4	$-10a^3$.	a^2	$+20$	$-18a$	$\Pi\, 0$
—	$+m$	$+m^2$	$-6m$	$-4m^2$	$+4m$	
0	$+n$	$+2$	$-6n$	-8	$+4n$	
	—	$+2$	$+m^3$	-8	$-2m^3$	
	0	$+n^2$	$+2m$	$-4n^2$	$-4m$	
		—	$+2n$	$+m^4$	$-4n$	
		-6	$+n^3$	$+2m^2$	$-2n^3$	
		$+m^2$	—	$+2n^2$	$+16$	
		$+n2$	$-4m$	$+n^4$	$+2m^3$	
		—	$-4n$	—	$+2n^3$	
		0	$+m^3$	$+4$	$+2$	
			$+n^3$	$-2m^2$	—	
			—	$-2n^2$	0	
			0	$+m^4$		
				$+n^4$		
				—		
				0		

DIVISOR.

$+a - m - n \,\Pi\, 0.$

$+a^4$	$+ma^3$	$-6a^2$	$-4ma$	$+4$	$\Pi\, 0$.
	$+n$	$+m^2$	$-4n$	$-2m^2$	
		$+n^2$	$+m^3$	$-2n^2$	
			$+n^3$	$+m^4$	
				$+n^4$	

2ª ÆQUATIO DIVIDENDA.

Poſito $\sqrt[5]{8}| - \sqrt[5]{4}| \Pi + m - n$

a^5	a^4	$+10a^3$	a^2	$+20a$	-4	$\Pi\, o$
$-$	$-4m$	$+m^2$	$+6m$	$+4m^2$	$+4m$	
0	$-n$	-2	$-6n$	-8	$-4n$	
	0	-2	$+m^3$	-8	$+2m^3$	
		$+n^2$	$-2m$	$+4n^2$	$-4m$	
		$+6$	$+2n$	$+m^4$	$+4n$	
		$+m^2$	$-n^3$	$-2m^2$	$-2n^3$	
		$+n2$	$+4m$	$-2n^2$	$+8$	
		0	$-4n$	$+n^4$	$-2m^3$	
			$+m^3$	$+4$	$+2n^3$	
			$-n^3$	$+2m^2$	-4	
			0	$+2n^2$	0	
				$+m^4$		
				$+n^4$		
				0		

DIVISOR.

$| + a - m + n \Pi\, o.$

$+a^4$	$+ma^3$	$+6a^2$	$+4ma$	$+4$	$\Pi\, o.$
	$-n$	$+m^2$	$-4n$	$+2m^2$	
		$+n^2$	$+m^3$	$+2n^2$	
			$-n^3$	$+m^4$	
				$+n^4$	

Atque ſic ex diviſionis legibus abundè confirmatur radicem æquationis $+ a^5 - 10a^3 + 20a - 18 \Pi\, o$ eſſe $+ \sqrt[5]{16}| + \sqrt[5]{2}|$; Et radicem æquationis $+ a^5 + 10a^3 + 20a - 4 \Pi\, o$ eſſe $+ \sqrt[5]{8}| - \sqrt[5]{4}|$, quod ante ex harum æquationum geneſi demonſtratum fuit.

MONITUM.

Ut propoſita æquatio in 5° gradu conſiſtẽs per traditam Regulam ſolvi poſſit non ſufficit ut eodem modo affecta ſit, ac exemplaris æquatio $+ a^5 - qa^3 + ſa - t \Pi\, o$, ſed adhuc requiritur ut $+ \frac{1}{25} qq \Pi + \frac{1}{5} ſ$, omninò juxta naturam originalis æquationis $+ a^5 - 5mna^3 + 5m^2n^2$
$- m^5 \Pi\, o$. Idem ferto judicium de aliis adventitiis æqua-
$- n^5$
tionibus ad altiores gradus aſcendentibus, ubi expoſitis præceptis locus non eſſet, niſi in ipſis intermediorum terminorum coëfficientes eandem inter ſe relationem haberent, quam habent ad invicem intermediorum terminorem coëfficientes in æquationibus originalibus, ſive per viam generationis inventis.

Extant aliæ æquationum per meſolabum reſolubilium generationes, quas in alio opere trademus, cum earum reſolutione.

ADDITAMENTA
QUÆDAM.

NOVA METHODVS EXTRAHENDI RADICEM SVBÆQVIBIMENSAM EX QVIBVSCVMQVE BINOMIIS.

REGULA.

QUANDO binomii majus nomen eſt abſolutum, minus verò ſurdum dividatur $\square^{um}$ minoris nominis per 4, & quotus inde proveniens $+aa$ æquabitur majori nomini abſoluto, ducto in incognitam a. Quare ſi hujus æquationis radices extrahantur, erunt harum radicum radices ſubæquibimenſæ, eæ quæ requiruntur.

Quando verò propoſiti binomii minus nomen eſt abſolutum, exiſtente majori ſurdo ; vel etiam quando ambo nomina ſunt ſurda, dividatur $\square^{um}$ minoris nominis per 2, & quotus inde proveniens ablatus à $\square^{o}$ majoris nominis reſiduum dabit, quod in incognitam a ductum æquabitur $\lvert\overline{4}\rvert^{o}$ minoris nominis, per 2 primùm diviſi $+aa$. Unde ſi ex hac æquatione radices extrahantur, erunt harum radicum radices ſubæquiquadrimenſæ, eæ quæ requiruntur.

IDEM PER NOTAS.

Quando proponitur $+c + \sqrt{d}\,|$, eſtque $+c\,F + \sqrt{d}\,|$, Quæratur valor ſequentis æquationis $+aa + \frac{1}{4}d \,\Pi + ca$, vel $+aa \,\Pi + ca - \frac{1}{4}d$, & fiet $+a \,\Pi + \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{4}d}\,\lfloor$.

Quare per canonis leges habetur

$$+\sqrt{\tfrac{1}{2}c+\sqrt{\tfrac{1}{4}cc-\tfrac{1}{4}d}}\,\Big| + \sqrt{\tfrac{1}{2}c-\sqrt{\tfrac{1}{4}cc-\tfrac{1}{4}d}}\,\Big|\ \Pi\ \sqrt{+c+\sqrt{d}}\,\Big|$$

Quando verò datur $+c$ $+\sqrt{d}\,|$ eſtque $\sqrt{d}\,|$ ꟻ c, vel etiam quando datur $+\sqrt{c}\,|$ $+\sqrt{d}\,|$ eſtque $\sqrt{c}\,|$ ⊓ $\sqrt{d}\,|$.

In 1ª hypotheſi quæratur valor ſequentis æquationis $\begin{array}{l}+d\\-\frac{1}{2}cc\end{array} a$ $\Pi + \frac{1}{16}c^4 + aa$, vel $+aa\ \Pi + \begin{array}{l}d\\-\frac{1}{2}cc\end{array} a - \frac{1}{16}c^4$, & fiet $+a\ \Pi$

$+\frac{1}{2}d-\frac{1}{4}cc \pm \sqrt{\frac{+d^2-dc^2}{4}}\,\Big|$. Quare per canonis leges habetur

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{4}cc+\sqrt{\dfrac{dd-dcc}{4}}}\,\Big|\Big| \\ +\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{4}cc-\sqrt{\dfrac{dd-dcc}{4}}}\,\Big|\Big| \end{array}\right\}\ \Pi\ \sqrt{+c+\sqrt{d}}\,\Big|.$$

At in 2ª hypotheſi quæratur valor ſequentis æquationis $+\begin{array}{l}d\\-\frac{1}{2}c\end{array} a\ \Pi + \frac{1}{16}cc + aa$ vel $+aa\ \Pi + \begin{array}{l}d\\-\frac{1}{2}c\end{array} a - \frac{1}{16}cc$, & fiet

$+a\ \Pi + \frac{1}{2}d - \frac{1}{4}c \pm \sqrt{\frac{+dd-dc}{4}}\,\Big|$. Quare per canonis leges habetur

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[4]{+\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{4}c+\sqrt{\dfrac{+dd-dc}{4}}}\,\Big|\Big| \\ +\sqrt[4]{+\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{4}c-\sqrt{\dfrac{+dd-dc}{4}}}\,\Big|\Big| \end{array}\right\}\ \Pi\ \sqrt{+\sqrt{c}\,|+\sqrt{d}\,|}\,\Big|.$$

IN PRIMO CASU.

Exemplum primum.

Propoſitum binomium eſto $+27+\sqrt{704}\,|$, cujus radix ſit extrahenda.

Quoniam hîc majus nomen eſt abſolutum, Idcirco di-

vidatur $\square^{um}$ minoris nominis 704 per 4 hoc modo $\frac{704}{4}$ $\Pi + 176$. Quare per Regulam fit $+aa + 176\,\Pi + 27a$ vel $+aa\,\Pi + 27a - 176$ & conſequenter $+a\,\Pi$ $+\frac{27}{2} \pm \left(\sqrt{\frac{+729-176}{4}}\,\Big|\,\Pi\right)\frac{5}{2}$. Ideſt $+a\,\Pi + 16$, vel $+a\,\Pi + 11$. Ergo $+4 + \sqrt{11}\,|$, eſt radix quæſita. Vel ſi datum fuiſſet $+27 - \sqrt{704}\,|$ radix quæſita foret $+4 - \sqrt{11}\,|$, ut manifeſtum eſt.

EXEMPLUM SECUNDUM.

Propoſitum binomium eſto $+5 + \sqrt{24}\,|$, cujus radix ſit invenienda. Quoniam hîc adhuc majus nomen eſt abſolutum, idcirco dividatur $\frac{24}{4}$ (6. Ergo per Regulam $+6 + aa\,\Pi + 5a$, vel $+aa\,\Pi + 5a - 6$, ergo $+a\,\Pi$ $+\frac{5}{2} \pm \left(\sqrt{\frac{25-6}{4}}\,\Big|\,\Pi\right)\frac{1}{2}$, Ideſt $+a\,\Pi + 3$ vel $+a\,\Pi + 2$, & conſequenter $+\sqrt{3}\,| + \sqrt{2}\,|$ eſt radix quæſita. Et ſi haberetur $+5 - \sqrt{24}\,|$, Radix quæſita foret $+\sqrt{3}\,| - \sqrt{2}\,|$, ut manifeſtum eſt.

IN II° CASU.

EXEMPLUM 1um.

Eſto binomium $+10 + \sqrt{180}\,|$, cujus radix ſit invenienda. Quoniam hîc majus nomen eſt ſurdum, idcircò dividatur $\frac{100}{2}$ (50, & $+180\,\Pi + 130$. Ergo per regulam $+130a$
-50
$\Pi + 625 + aa$, vel $+aa\,\Pi + 130a - 625$. Quare $+a\,\Pi$ $+65 \pm (\sqrt{+4225-625}\,|\,\Pi)$ 60, ideſt $+a\,\Pi + 125$ vel $+a\,\Pi + 5$, ergo per canonis leges habetur $+\sqrt[4]{125}\,| + \sqrt[4]{5}\,|$ $\Pi \sqrt{+10 + \sqrt{180}\,|}\,|$

EXEMPLUM 2um.

Propoſitum binomium eſto $+\sqrt{27}| + \sqrt{24}|$, cujus radix ſit invenienda.

Quoniam hîc ambo nomina ſunt ſurda, idcircò dividatur, ut priùs, $\frac{24}{2}$ (12 & $+27 \,\Pi\, +15$, unde per regulam
-12
fit $+15a \,\Pi\, +aa +36$, vel $+aa \,\Pi\, +15a -36$. Ergo $+a \,\Pi\, +\frac{15}{2} \pm (\sqrt{\frac{225}{4} - 36} \,|\, \Pi)\, \frac{9}{2}$. Ideſt $+a \,\Pi\, +12$, vel $+a \,\Pi\, +3$, ergo per canonis leges habetur $+\sqrt[4]{12}| + \sqrt[4]{3}| \,\Pi\, \sqrt{+\sqrt{27}| + \sqrt{24}|}|$. Et ſi haberetur $+\sqrt{27}| - \sqrt{24}|$ foret $+\sqrt[4]{12}| - \sqrt[4]{3}| \,\Pi\, \sqrt{+\sqrt{27}| - \sqrt{24}|}|$. Ut manifeſtum eſt.

SCHOLIUM.

Nolim veteri methodo, quæ ſimpliciſſima, & valde naturalis eſt, hanc noſtram præferre, ipſa tamen ſuam habet elegantiam, cum aliqua utilitate conjunctam. Non enim hîc, ut in antiqua, neceſſe eſt inveſtigare utrum duo ſurda ſint inter ſe commenſurabilia, quod aliquando non exigui laboris eſt. Ut ut ſit juvabit rem eandem pluribus modis efficere poſſe.

METHODUS UNIVERSALIS, ET FACILLIMA EXTRAHENDI RADICES EX QUIBUSCUMQUE BINOMIIS, RADICEM BINOMIAM, ET PLANAM HABENTIBUS.

PRÆPARATIO.

1° ut res quàm maximè facilis evadat, & ad unam, aut alteram difficultatem redigatur, fractiones, ſi quæ ſint, à dato binomio eximantur. 2° ſi ambæ partes propoſiti binomii ſint ineffabiles, reducatur ad aliud binomium, cujus altera pars ſit effabilis, ut docet Schootenius in ſuis commentariis ad librum 3um Geometriæ Carteſii. Ultimò tollatur è radicalis ſigni vinculo pars abſoluta, ſive pars radici analoga, quæ cum reliqua parte coefficiente quantitatem in vinculo comprehenſam producit, hoc eſt, dividatur

Digitized by Google

vidatur quantitas ſigno radicali affecta, ſive ea ſit ſimplex, ſive è pluribus compoſita per poteſtatem, ſigno analogam, ex cujus in quotum è diviſione naſcentem ductu genita fuerit. Atque hujus poteſtatis, ſive ea ſit $\square$, ſive $\boxed{3}$ & cæt. radix, relictam in vinculo coefficientem quantitatem, ſive quotum multiplicans, ſubſtituatur in locum illius partis dati binomii, quæ ineffabilis eſt. Ut ſi detur $\sqrt{12}|$, quoniam numerus 12 provenit ex ductu $\square^i$ 4×3, relinquatur in vinculo coefficiens 3 hoc modo $\sqrt{3}|$, & ſic obtinebitur pars ſurda, ſive ineffabilis quæſitæ radicis. Tum radix ex $\square^o$ 4 ſumatur, quæ eſt 2, & tandem in locum $\sqrt{12}|$ ſubrogetur $2\sqrt{3}|$. Hæc autem coefficiens poteſtas, ſive $\square$, ſive $\boxed{3}$ & cæt. facile invenitur quærendo diviſores omnes quantitatis vinculo concluſæ. Si verò in quantitatibus integris, vel fractis, quæ vinculo continentur, remanente earumdem ſpecie, nulla poteſtas radici analoga reperiri poſſet, quæ quantitatem, ſigni radicalis vinculo conſtrictam dividere poſſet, argumentum eſſet datum binomium quæſitâ radice carere, ſed eam tantùm per radicale ſignum denotari poſſe. His præmiſſis nomen ſurdum vel erit ſimplex, vel aliquâ quantitate abſolutâ afficietur, quæ ipſum multiplicabit. Atque hi duo caſus duabus diverſis hypotheſibus indigent, ſicut infra patebit. Itaque

REGULA GENERALIS.

Supponatur binomium $\mp d \mp \sqrt{c}|$, vel $\mp d \mp p\sqrt{c}|$. prout opus erit, ſicut dictum eſt, æquale quæſitæ radici. Suppoſitum hoc binomium in ſe multiplicetur ſecundum exigentiam quæſitæ radicis, ter quidem ſi $\sqrt[3]{}$ ſit extrahenda; quinquies ſi de $\sqrt[5]{}$ quæſtio ſit, & ſic de cæteris. Atque hoc modo duæ obtinebuntur partes, quarum una abſoluta erit, hoc eſt nullo radicali ſigno implicita, quæ reſpondebit parti abſolutæ dati binomii, cujus etiam valor erit: altera verò cujus termini ſurdâ quantitate affecti erunt, & reſpondebit quantitati partem ineffabilem dati binomii multiplicanti, cujus quoque valor erit.

Poſteà in locum c, & genitarum inde poteſtatum ſubſti-tuatur ejus valor, nempe ſæpius nominatum reſiduum, quod in vinculo reperitur, poſtquam ab hoc vinculo poteſtas radici analoga liberata eſt, ſicut diximus in præparatione, niſi mavis initio operis dictum reſiduum vinculo aſtrictum ponere loco $\sqrt{c}|$. Atque ex duabus æquationibus, quæ per collationem partium effecti binomii cum reciprocis dati binomii partibus multifariam inveniri poteſt quæſitæ radicis pars abſoluta, ſive quæ nullo radicali ſigno afficitur, ſicut exempla docebunt.

PRIMUS CANON

PRO EXTRACTIONE $\sqrt[3]{}$ IN 1° CASU.

Eſto $+d+\sqrt{c}|$, quod binomium ter in ſe ductum efficit $\left.\begin{matrix} +d^3 & +3dd \\ +3cd & +c \end{matrix}\right\}\sqrt{c}|\,\Pi\,|\boxed{3}|\overline{+d-\sqrt{c}|}|$ vel poſito $+d-\sqrt{c}|$ habetur $\left.\begin{matrix} +d^3 & -3dd \\ +3cd & -c \end{matrix}\right\}\sqrt{c}|\,\Pi\,|\boxed{3}|\overline{+d-\sqrt{c}|}|$.

Jam ſit propoſitum binomium $+m+n\sqrt{c}|$, ad hanc formam redactum per ea, quæ ſupra dicta ſunt. Igitur $+d^3+3cd-m\,\Pi\,o$, & $+3dd+c-n\,\Pi\,o$.

EXEMPLUM PRIMUM.

Eſto $+26+\sqrt{675}|$, cujus $\sqrt[3]{}$ ſit extrahenda.

Per præparationem tollatur è radicalis ſigni vinculo quicquid eſt abſolutum, & ſic obtinebitur $+26+15\sqrt{3}|$. Ergo $+d^3+3cd-26\,\Pi\,o$, Et $+3dd+c-15$, & valore c, nempe 3 in ejus locum ſubrogato oritur $+d^3+9d-26\,\Pi\,o$, & $+3dd-12\,\Pi\,o$. Ideſt $+dd\,\Pi+4$, & conſequenter $d\,\Pi\,2$. Quare propoſiti binomii $+26+\sqrt{675}|$ quæſita radix eſt $+2+\sqrt{3}|$.

Poteſt etiam inveniri idem valor quantitatis d, quærendo radicem æquationis $+d^3+9d-26\,\Pi\,o$, quod admodum facile eſt, quoniam illius radix ſemper eſt numeris abſolutus, & ſolâ diviſorum ultimum terminum dividentium inquiſitione perficitur.

Si propoſitum binomium eſſet $+26-\sqrt{675}|$, inveni-

Digitized by Google

retur pro dati binomii radice $+2-\sqrt{3}|$, vel ſi datum foret $-2+\sqrt{3}|$ proveniret $-2+\sqrt{3}|$ pro dati binomii radice, ut manifeſtum eſt.

EXEMPLUM SECUNDUM

EX GEOMETRIA CARTESII PAG. 393

Proponatur $+44+\sqrt{1944}|$, cujus $\sqrt[3]{}$ ſit extrahenda. Fiat per præparationem $+44+18\sqrt{6}|$. Ergo $+3dd+c-18\,\Pi\,o$, & fit $c\,\Pi\,6$, quo valore in locum c ſubrogato fit $+3dd-12\,\Pi\,o$, Ideſt $dd\,\Pi+4$, & $d\,\Pi\,2$. Ergo $+2+\sqrt{6}|\,\Pi\,\sqrt[3]{+44+\sqrt{1944}|}|$.

SECUNDUS CANON

PRO EXTRACTIONE $\sqrt[3]{}$ IN SECUNDO CASU.

Eſto $+d+p\sqrt{c}|$, quod binomium ter in ſe ductum efficit $\left.\begin{matrix}+d^3 & +3ddp \\ +3dcp^2 & +p^3c\end{matrix}\right\}\sqrt{c}|\,\Pi\,|\tfrac{1}{3}|\overline{+d+p\sqrt{c}|}|$.

Jam ſit datum binomium $+m+n\sqrt{c}|$. Igitur $+d^3+3dcp^2-m\,\Pi\,o$, & $+3ddp+p^3c-n\,\Pi\,o$.

Ut autem habeatur d quæratur valor ſequentis æquationis $+y^3-6my^2-\begin{matrix}15mm\\+27cnn\end{matrix}\,y-8m^3\,\Pi\,o$.

Cognitâ autem y ſtatim naſcetur d. Etenim $\sqrt{\tfrac{1}{3}y}|\,\Pi\,d$.

EXEMPLUM EX GEOMETRIA CARTESII PAG. 392.

Detur binomium $+25+\sqrt{968}|$.

Per præparationem fit $+25+22\sqrt{2}|$, eſtque $m\,\Pi\,25$, $n\,\Pi\,22$, & $c\,\Pi\,2$.

Jam ut habeatur radix æquationis $+y^3-6my^2-\begin{matrix}15mm\\+27cnn\end{matrix}\,y-8m^3\,\Pi\,o$.

OPERATIONES.

Mult. 1ª	*Mult.* 2ª	*Mult.* 3ª	*Subduct.*
$+my^2 \Pi +25y^2$	$+m^2y \Pi +625y$	$+n^2y \Pi +484y$	$+26136y$
$\times$	$\times$	$\times$	$-9375y$
-6	-15	$+27c \Pi +54$	
	$-15m^2y \Pi$ 3125 625		
$-6my^2 \Pi -150y^2$		$+27cn^2y \Pi$ 1936 2420	$+16761y$
	$-15m^2y \Pi -9375y$		
		$+27cn^2y \Pi +26136y$	
Mult. 4ª			
$+mm \Pi +625$			
$\times$			
$-8m \Pi -200$			
$-8m^3 \Pi -125000$			

Quare $+y^3 -150y^2 +16761y -125000 \Pi o$; & fit $+y \Pi +8$. Ergo per canonis leges habetur $+d \Pi \left(\sqrt[3]{\frac{8}{8}} \Pi\right) +1$. At $p \Pi \left(\sqrt{\frac{m-d^3}{3cd}} \Pi \sqrt{\frac{25-1}{6}} \Pi\right) 2$.

Ideoque propoſiti binomii $+25+\sqrt{968}$ quæſita radix ſit $+1+2\sqrt{2}$.

Huic ſimiles æquationes inveniri poſſunt ut habeatur d, in extractione $\sqrt[5]{\ }$, $\sqrt[7]{\ }$, & cæt. dati binomii, quando ſurdum abſolutâ quantitate afficitur, ſed cùm res ſit plena laboris, meliùs erit ex integris factoribus quantitatis ſurdum afficientis illum ſeligere, qui debet eſſe æqualis p in hypothetica radice $+d+p\sqrt{c}$. Quod facilè fiet examinando illos ordine, donec in idoneum incideris, eodem modo quo in æquationum diviſionibus examinantur diviſores ultimi termini, qui illum abſque fractione dividere poſſunt. Verbi gratiâ, quoniam in dato binomio $+25 +22\sqrt{2}$, cujus $\sqrt[3]{\ }$ extrahi debet, quantitas ſurdum afficiens, nempe 22 factores habet 2, & 11. Supponatur $p \Pi 2$, quo valore in ejus locum ſubrogato in 2ᵈᵃ canonis æquatione $+3d^2p+p^3c-22 \Pi o$, habetur $+6d^2-6 \Pi o$, id eſt $+dd \Pi +1$, & fit $+d \Pi +1$. Eſt verò 1ª Canonis æquatio $+d^3+3cp^2d-25 \Pi o$, in qua valoribus, d, p

Digitized by Google

& c in eorum loca ſubſtitutis fit $+1+24-25\,\Pi\,o$. Quod cùm verùm ſit, conſtat $p\,\Pi\,2$. Si verò hujus æquationis termini per ſubrogationem valorum d, p & c non evanuiſſent, neceſſarium fuiſſet alium factorem ſurdum afficientis ſupponere æqualem p, & eadem arte tentare utrum aſſumptus valor ipſi conveniret.

PRIMUS CANON
PRO EXTRACTIONE $\sqrt[5]{}$ IN 1° CASU.

Eſto $+d+\sqrt{c}|$, quod binomium quinquies in ſe ductum efficit.

$$\left.\begin{matrix} +d^5 & +5d^4 \\ +10d^3c & +10cd^2 \\ +5ccd & +cc \end{matrix}\right\}\sqrt{c}\,|\ \Pi\ |\overline{5}|\,\overline{+d+\sqrt{c}|}\,|.$$

Jam ſit propoſitum binomium $+m+n\sqrt{c}|$, ad hanc formam redactum per ea quæ in præparatione dicta ſunt.

Igitur $+d^5+10d^3c+5ccd-m\,\Pi\,o$, & $+5d^4+10cd^2+cc-n\,\Pi\,o$.

EXEMPLUM EX GEOMETRIA CARTESII,
Pag. 393.

Proponatur $+176+\sqrt{32000}|$, cujus $\sqrt[5]{}$ ſit extrahenda.

Per præparationem invenitur $+176+80\sqrt{5}|$.

Ideoque $+d^5+10cd^3+5ccd-176\,\Pi\,o$, & $+5d^4+10cd^2+cc-80\,\Pi\,o$, & fit $c\,\Pi\,5$, quo valore in ejus locum ſubrogato habetur

$+d^5+50d^3+125d-176\,\Pi\,o$, & $+5d^4+50d^2-55\,\Pi\,o$, id eſt $+d^4+10d^2-11\,\Pi\,o$, & fit $+d\,\Pi+1$. Ergo quæſita dati binomii $+176+\sqrt{32000}|$ $\sqrt[5]{}$ eſt $+1$ $\sqrt{5}|$

Poteſt etiam inveniri idem valor litteræ d, quærendo radicem æquationis $+d^5+50d^3+125d-176\,\Pi\,o$, ut jam notavimus.

SECUNDUS CANON

PRO EXTRACTIONE $\sqrt[5]{}$ IN 2do CASU.

Eſto $+d+p\sqrt{c}\,|$, quod binomium quinquies in ſe ductum efficit

$$\left.\begin{array}{ll} +d^5 & +5d^4 \\ +10cp^2d^3 & +10cp^3d^2 \\ +5c^2p^4 & +c^2p^5 \end{array}\right\} \sqrt{c}\,|\,\Pi\,|\boxed{5}|\,\overline{+d+p\sqrt{c}\,|}\,|.$$

Jam ſit propoſitum binomium $+m+n\sqrt{c}\,|$ ad hanc formam redactum, ut ſuprà.

Igitur $+d^5+10cp^2d^3+5c^2p^4-m\ \Pi\ o$, & $+5d^4+10cp^3d^2+c^2p^5-n\ \Pi\ o$.

EXEMPLUM.

Eſto $+401+\sqrt{177608}\,|$ cujus $\sqrt[5]{}$ ſit extrahenda.

Fiat per præparationem $+401+298\sqrt{2}\,|$. Iam quia numerus 298 ſurdum $\sqrt{2}\,|$ afficiens factores habet 149 & 2. Supponamus 1° in hypothetica radice $+d+p\sqrt{c}\,|$, literam $p\ \Pi+2$, nempe uni è factoribus 298. Igitur juxta canonis leges operando, & mutatis p & c in ſuos valores 2, & 2 habetur $+10d^4+160d^2-170\ \Pi\ o$, ideſt $+d^4+16d^2-17\ \Pi\ o$, & fit $+d\ \Pi+1$.

Eſt verò $+d^5+10cp^2d^3+5c^2p^4-m\ \Pi\ o$, ideſt hoc in loco mutatis mutandis $+1+80+320-401\ \Pi\ o$, quod cùm verum ſit ſequitur $+p\ \Pi+2$, & propoſiti binomii

$+401+\sqrt{177608}\,|\ \sqrt[5]{}$ eſſe $+1+2\sqrt{2}\,|$.

Atque ſic in infinitum progredi licet in extractione cujuſlibet radicis è dato binomio. Verùm de his dicta ſufficiant.

Carteſianam methodum huic noſtræ præferat qui volet, haud longè abſumus ab eadem ſententia: verumtamen traditas regulas eo præſertim nomine dignas cenſemus, quòd tam earum inventio quàm praxis facillima ſit.

METHODUS UNIVERSALIS AUFFERENDI UNUM QUEMLIBET TERMINUM PRIMO EXCEPTO E' QUAVIS ÆQUATIONE PROPOSITA.

Eſto quælibet æquatio $+a^4 - pa^3 + qa^2 - ra + ſ \,\Pi\, o$.
Fiat $+e + m \,\Pi\, + a \mid + e^2 + 2me + m^2 \,\Pi\, + a^2 \mid + e^3 + 3me^2 + 3m^2e + m^3 \,\Pi\, + a^3$, & in æquatione propoſita ubique mutando a, ejuſque poteſtates, in $+e + m$, ejuſque reciprocas poteſtates, erit

$$\left.\begin{array}{lllll} +e^4 & +4me^3 & +6m^2e^2 & +4m^3e & +m^4 \,\Pi\, +a^4 \\ & -p & -3pm & -3pm^2 & -pm^3 \,\Pi\, -pa^3 \\ & & +q & +2qm & +qm^2 \,\Pi\, +qa^2 \\ & & & -r & -rm \,\Pi\, -ra \\ & & & & +ſ \;\; \Pi\, +ſ. \end{array}\right\} \Pi\, o.$$

Jam liberum eſt ex enata per ſuppoſitionem noſtram æquatione propter arbitrabilem, ſive ad arbitrium ſumptam literam m, quemlibet terminum aufferre, primo excepto.

Quare ſi velim 2um terminum aufferre. Fiat $+4m - p \,\Pi\, o$, ſive $+\frac{1}{4}p \,\Pi\, + m$, & eadem æquatio

$$\begin{array}{llll} +e^4 \; +6m^2e^2 & +4m^3e & +m^4 \,\Pi\, o \\ -3pm & -3pm^2 & -pm^3 \\ +q & +2qm & +qm^2 \\ & -r & -rm \\ & & +ſ \end{array}$$

remanebit, verùm 2do termino carens, eo quippe per hypotheſim $+4m - p \,\Pi\, o$ evaneſcente.

Si verò tertium terminum aufferre libuerit fiat $+6m^2 - 3pm + q \,\Pi\, o$, vel $+m^2 \,\Pi\, + \frac{1}{2}pm - \frac{1}{6}q$, & conſequenter $+\frac{1}{4}p + \sqrt{\frac{1}{16}p^2 - \frac{1}{6}q} \,\Pi\, + m$, & eadem æquatio

$$\begin{array}{llll} +e^4 \; +4me^3 & +4m^3e & +m^4 \,\Pi\, o \\ \quad -p & -3pm^2 & -pm^3 \\ & +2qm & +qm^2 \\ & -r & -rm \\ & & +ſ \end{array}$$

remanebit, verùm tertio termino carens, eo quippe per hypotheſim $+6m^2 - 3pm$

$+q \Pi o$ evaneſcente. Et hoc deinceps ordine procedendum eſt ad tollendum quemlibet è reliquis terminis. Sed ex ultimi termini ablatione nihil emolumenti capitur, quoniam ex facienda hypotheſi vel propoſita æquatio recurrit, ut in hoc exemplo, vel certè inde naſcitur æquatio, quæ totidem dimenſiones habet quàm propoſita, ac præterea ejuſdem eſt naturæ. Ablatio verò penultimi termini æquationem gignit, uno gradu inferiorem eâ, quæ data eſt, & quæ ideò minorem difficultatem involvit. Minor adhuc difficultas occurret in antepenultimi termini ſublatione, nam ex facienda hoc loco hypotheſi exſurget æquatio duobus gradibus inferior eâ, quæ proponitur. Uno verbo quot locis diſtabit terminus auſferendus ab ultimò, totidem gradibus inferior eâ, quæ propoſita eſt orietur æquatio, donec ventum erit ad 2um terminum, pro quo auſferendo omnium ſimpliciſſima æquatio ex ibi facienda ſuppoſitione prodibit. Poſtquàm autem ablatitium terminum elegerimus, ſi proveniens ex enata æquatione valor incognitæ & ad arbitrium ſumptæ literæ m, vel ejus poteſtates in reliquis terminis ſubrogentur, habebitur æquatio illo, quem tollere volebamus, termino multata, ut quærebatur.

SOLU-

SOLUTIO PROBLEMATIS

a D. Wallisio totius Europæ Mathematicis propositi, ſed priùs ad generale revocati, anno M. DC. LVIII. eodem tempore quo propoſitum eſt.

PROBLEMA D. WALLISII.

Datis Ellypſeos maximis diametris, tum punĉto in tranſverſa ejus diametro aſſignato, reperire in numeris ſegmenta lineæ intra ellypſim terminatæ, & per datum punĉtum tranſeuntis, atque datum angulum cum diĉta diametro facientis.

Verùm quia propoſitæ quæſtionis ſolutio æque facilis eſt in numeris, ac in lineis (ut poſtea apparebit) meliùs factum me judicavi ſi priùs demonſtrationem analyticam hîc afferrem, ex qua tam numerica, quàm geometrica ſequeretur ad problematis ſolutionem pertinens effectio. Atque ut hæc ſolutio cum fœnore detur, ſpeciale D. Walliſii Problema ad generale ſic revoco.

Problema generale.

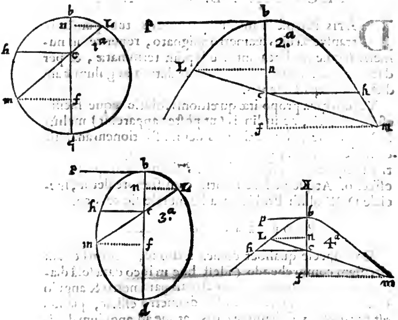
Datâ ſpecie qualibet conicâ ſectione, ſub qua etiam circulum comprehendo (ideſt hoc in loco datâ ſolâ diametro, ſi ſectio ſit circulus, vel datis parametro & angulo quem ipſa parameter cum ſua diametro efficit, quando eſt parabola, vel denique datis, atque ad angulum debitum conſtitutis diametro, & contiguâ parametro, cum eſt ellypſis, vel hyperbola) tum punĉto in interna ejus diametro ſignato, tam in numeris, quàm in lineis reperire ſegmenta lineæ intra ſectionem terminatæ, & per datum punĉtum tranſeuntis, atque datum angulum cum ſecta diametro facientis.

Determinatio Casuum.

Hoc Problema duos habet caſus, vel enim datus an-

gulus æqualis eſt angulo, quem ſectionis parameter cum ſua diametro conſtituit, vel eidem inæqualis eſt. Primus caſus nullam ferè patitur difficultatem, & tota conſiſtit in ſecundo caſu, quando nempe angulus datus inæqualis eſt angulo ſectionis parametri ad ſuam diametrum applicati.

SOLUTIO PROBLEMATIS IN PRIMO CASU.



DATUM.

PRÆPARATIO 1a.

bd Π *d*	*bp* Π *p*
bc Π *b*	*bc* Π *y*
cd Π *c*	

Detur 1° alicujus circuli diameter *bd*, vel 2° alicujus parabolæ parameter *bp*, & angulus *pbc*, quem ipſa parameter *bp*; cum ſua diametro *bc*, conſtituit, vel 3° alicujus ellypſeos, vel hyperbolæ tranſverſa diameter *bd*, & parameter *bp*, invicem junctæ ad debitum angulum *dbp*. Præterea in

circulo angulus *hcb* ſit rectus, in aliis verò figuris æquetur angulo *cbp*. Unde recta *hc*, quæ inveniri debet una erit ex applicatis ad diametrum *bc* in dato puncto *c*, ut conſtat ex harum ſectionum generatione.

DEMONSTRATIO.

Deſcriptis figuris, ut factum vides. Quoniam 1° in circulo angulus *hcb* rectus eſt ex natura circuli, ideo $\sqrt{bc}$ Π y. 2° in parabola $\sqrt{bp}$ Π y. 3° in ellypſi, & hyperbola. $d . p :: bc . yy$. Ergo $\frac{bcp}{d}$ Π yy, & $\sqrt{\frac{bcp}{d}}$ Π y, quod erat demonſtrandum.

SOLUTIO PROBLEMATIS IN 2° CASU.

PRÆPARATIO 2ª.

bc Π *b* ſegmentum minus. *cd* Π *c* ſegmentum majus. *c*—*b* Π *q* differentia ſegmentorum. *hc* Π *m* applicata. *bd* Π *d* tranſverſa diameter. *d*+*b* Π *n*. *cf* Π *y* ignota quantitas.	Iiſdem quæ prius poſitis, jam datus angulus *mcf* ſit major, vel minor recto in circulo, vel angulo *cbp* in reliquis figuris.

CONSTRUCTIO.

A puncto *m* in diametrum *bc* demittatur in circulo perpendicularis, vel in reliquis figuris parallela parametro *bp*, nempe *mf*, quæ erit una ex applicatis ad diametrum *bc*, & conſequenter diverſa à recta *mc* quæ ab applicatarum numero excluditur propter conceſſum imparalleliſmum linearum *mc*, & *bp*. Demum ducatur applicata *hc*.

DEMONSTRATIO.

Dantur omnes anguli △li *mcf* ex hypotheſi, & conſtructione, ergo datur ratio omnium laterum inter ſe, videlicet lateris *cf*, ad latus *mf* quam pono ut *z* ad *r*, & voco pri-

Digitized by Google

mam rationem datam. Deinde ejuſdem lateris cf ad latus mc quam pono ut z ad f, hanc voco ſecundam rationem datam. Unde ſequitur $mc . mf :: f . r$. Nam factum ex tribus datis z, r, f $\triangle^{lum}$ proportionale eſt $\triangle^{lo}$ mcf & hanc ultimam voco rationem 3° datam.

Jam ex hypotheſi $z . r :: y . mf$, Ergo $\frac{ry}{z} \Pi mf$ & $\frac{r^2y^2}{zz} \Pi$ $\square mf$.

Atqui 1° in circulo $\frac{rryy}{zz} \Pi$ ($\sqcap^{lo}$ $dfb \Pi$) $bc + qy - yy$, & ordinata æquatione fit $yy \Pi \frac{bczz + qzzy}{zz + rr}$

Atqui 2° in parabola $\frac{rryy}{zz} \Pi$ ($pbf \Pi pb + py \Pi$) $mm + py$ & ordinata æquatione fit $yy \Pi$ ($\frac{\frac{mm + py}{rr}}{zz} \Pi$) $\frac{m^2z^2 + pz^2y}{rr}$

Atqui 3° in Ellypſi $\frac{rryy}{zz} . bc + qy - yy :: mm . bc$. Ergo $\frac{bcrryy}{zz}$ $\Pi bcmm + qmmy - mmyy$ & ordinata æquatione fit ($yy \Pi \frac{\frac{+ bcmm + qmmy}{+ bcrr + mm}}{zz} \Pi$) $+ yy \Pi \frac{+ bcm^2z^2 + qm^2z^2y}{+ bcrr + m^2z^2}$

Atqui 3° in hyperbola $\frac{rryy}{zz} . bn + ny + yy :: mn . bn$.
$+ b$

Ergo $\frac{bnrryy}{zz} \Pi + bmmn + mmny + mmyy$, & ordinata
$+ bmm$

æquatione fit

$$\left(\frac{{+bm^2n+m^2ny+m^2y^2\;\Pi} \atop {+m^2b}}{\frac{+bnrr-mm}{zz}}\right)\frac{{+bm^2z^2n+m^2z^2ny\;\Pi+yy} \atop {+m^2z^2b}}{bnrr-m^2z^2}$$

Denique cùm ſit in omnibus figuris $z.\ ſ::y.\ mc.$ Ergo in omnibus figuris $mc\;\Pi\;\frac{ſy}{z}$. Unde cognita per mox inventas æquationes quantitate y, quantitas termini $\frac{ſy}{z}$ non latebit. Quod erat demonſtrandum.

ALITER.

Iiſdem quæ priùs poſitis, & ſupponendo $y\;\Pi\;mc$
Ex hypotheſi $ſ.\ r::y.\ mſ.$ Ergo $\frac{ry}{ſ}\;\Pi\;mſ.$ & $\frac{rryy}{ſſ}\;\Pi\;\square\, mſ.$

Sed etiam $ſ.\ z::y.\ cſ$, Ergo $\frac{zy}{ſ}\;\Pi\;cſ.$

Atqui in circulo $(\overline{\square\, b+\frac{zy}{ſ}\times c}\,|\times|\,\overline{c-\frac{zy}{ſ}}\,|\;\Pi)\; bc+\frac{qzy}{ſ}$ $-\frac{z^2y^2}{ſſ}\;\Pi\;\frac{r^2y^2}{ſſ}$ & totum per $ſſ$ multiplicando fit $b\,cſſ+qſzy$ $-z^2y^2\;\Pi\;r^2y^2$. Unde ordinata æquatione fit $yy\;\Pi\;\frac{bcſſ+qſzy}{+rr+zz}$.

Atque ſic plures æquationes inſtar præcedentium inſtitui poſſunt.

ADHUC ALITER.

Ponatur $mſ\;\Pi\;y$. Jam $z.\ r::cſ.\ y$. Ergo $\frac{zy}{r}\;\Pi\;cſ.$

Atqui in circulo $(\overline{\square+b+\frac{zy}{r}}\,|\times|\,\overline{c-\frac{zy}{r}}\,|\;\Pi)\;+bc$ $+\frac{qzy-zzyy}{rr}\;\Pi\;yy$ & totum per rr multiplicando fit

$+ bcrr + qrrzy - zzyy \,\Pi\, rryy$, unde ordinata æquatione habetur $+ yy \,\Pi\, \frac{+ bcrr + qrrzy}{+ rr + zz}$. Atque ſic plures æquationes ad inſtar præcedentium inſtitui poſſunt.

Hîc non immoror in extrahendis aut etiam verbis enunciandis inventarum æquationum radicibus, cùm id exſequi facillimum ſit, & hinc regulas deducere, tam ad geometricam, quàm ad numericam praxim accommodatas.

Multa quoque poſſem Corollaria hinc deducere, qualia ſunt comparatio rectarum, quæ in ſingulis figuris ſupra poſitis per idem punctum ducuntur, & in ellypſi comparatio omnium ſuarum diametrorum, quando datum punctum centrum eſt ellypſeos. Poſſem quoque propoſitum problema oſtendere in lineis curvis, gradatim magis ac magis compoſitis, ut in parabola, quam cubicam vocant, nam præmiſſæ analyſeos veſtigia ſequendo, & ponendo $y \,\Pi\, cf$ haberetur

$$y^3 \,\Pi\, \frac{bp^2z^3 + p^2z^3y}{rrr}, \text{vel } y^3 \,\Pi\, \frac{+ b^2pz^3 + 2bpz^3y + pz^3yy}{rrr},$$

prout cubus ex mf prima, vel ſecunda eſt ex duabus mediis proportionalibus inter bp, & bf. Itaut ex ſpeciali problemate propoſito utiliſſimum, & generale problema effeciſſe mihi videar. Verùm de his aliàs, nunc ad unius problematis ſolutionem hactenus allata ſufficiant.

Quoniam verò poſt inventas pro ſolutione propoſiti problematis æquationes non ſufficit earum radices extrahere, ut habeatur mc, placet coronidis loco, & in exemplum cæterarum primam æquationem verbis enunciare.

ÆQUATIO PRO CIRCULO.

$$yy \,\Pi\, \frac{+ qzzy + bczz}{+ zz + rr}$$

SIC ENUNCIATUR.

Si primæ rationis datæ antecedens in ſe multiplicatus, ſive aliter ejus quadratum ducatur primo in □lum ſub co-

gnitis datæ diametri ſegmentis, deinde verò in horum ſegmentorum differentiam ; & bina producta ſeparatim dividantur per aggregatum quadratorum ex primæ rationis datæ terminis. Quotuſque ex 1ª diviſione proveniens addatur ad quartam partem quadrati ſub quoto ex 2ᵈᵃ diviſione profecto, ac hujus ſummæ radix quadrata, dimidio quoti ſecundi contracta, vel aucta multiplicetur in conſequentem ſecundæ rationis datæ terminum. Enata inde producta per antecedentem ejuſdem ſecundæ rationis datæ terminum ſigillatim diviſa æquabuntur quæſitis ductæ in circulo lineæ ſegmentis. Sicut manifeſtum eſt ex præmiſſæ æquationis conſtitutione.

Atque hæc eſt prima regula, cujus ope tam in numeris, quam in lineis, quæſita ductæ, ſicut jubetur, in circulo lineæ ſegmenta reperiuntur.

FINIS.

EXTRAIT DU PRIVILEGE.

PAR grace & Privilege du Roy, en datte du vingt-ſixiéme de May mille ſix cent ſoixante ſept, Signé DE COTTEBLANCHE, & ſcellé : Il eſt permis à M. DULAURENS de faire imprimer, vendre & debiter un Livre par luy compoſé, intitulé FRANCISCI DULAURENS SPECIMINA MATHEMATICA *duobus Libris comprehenſa*, *&c.* par tel Libraire ou Imprimeur qu'il voudra choiſir, pendant ſept années. Et defenſes ſont faites à tous Libraires, Imprimeurs & autres d'imprimer ledit Livre, d'en vendre de contrefaits, ny meſme d'en extraire aucune choſe, ſans le conſentement exprés dudit ſieur Dulaurens, ou de ceux qui auront droit de luy, à peine de trois mille livres d'amende, de tous dépens, dommages & intereſts, & autres peines, comme il eſt plus amplement porté par ledit Privilege.

Monſieur Dulaurens a choiſi Charles Savreux Libraire Iuré à Paris, pour imprimer, vendre & debiter ledit Livre, auquel il a cedé & tranſporté ſon droit dudit Privilege. le 20. d'Aouſt 1667.

Regiſtré ſur le Livre de la Communauté des Libraires, Imprimeurs & Relieurs de Paris, ſuivant l'Arreſt du Parlement en datte du 8. d'Avril 1653. A Paris le 4. Juin 1667. *Signé* THIERRY, Adjoint du Syndic.

Achevé d'imprimer pour la premiere fois le 30. d'Aouſt 1667.

Les Exemplaires ont eſté fournis ſuivant le Privilege.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITT. EMANUELE

ERRORES CORRIGENDI.

Pag.	*Linea.*	*Errores.*	*Correctiones.*
5.	27.	crementum	incrementum.
22	11.	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{q\beta}{\beta}$.
33.	6.	$z\ a$	$z - a$.
45.	32.	uultiplicans	multiplicans.
56.	*in figura*	*pro* F *pone*	E.
57.	*in figura*	*pro* f *pone*	E.
65.	6.	duos buacceptis	duobus acceptis
81.	13.	Quoanim	Quoniam.
95.	13.	$geHe$	geH
Ibid.	19.	ecolaſcunt	coaleſcunt.
115.	30.	*poſt* æqualium, *pone*	arcus AP, & EO ſubtendunt.
Ibid.	*penult.*	7^{li}	$\angle^{li}$.
138.	2. & 3.	CG	CK.
Ibid.	19.	rectam DC	CK.
Ibid.	26.	M.	P.
139.	32.	Itaque	Illaque.
162.	4.	earum	quarum.
163.	8.	$a \sqcap$	$a \sqcap b$.
164.	10.	*affectnm*	*affectum.*
188.	12. *in fine*	$\frac{aa}{cc}$	$\frac{aa}{c}$
191.	6.	$1^{a} c \sqcap$	1^{a} c Π.
192.	3.	$+c+y$	$+a+y$.
Ibid.	5. & 13.	& extremarum differentia	ſub differentia mediæ & alterius extremæ.
202.	25. & 27.	$+\frac{1}{1}cc$	$+cc$.
204.	*ultima.*	$+r\frac{2}{3}$	$+\frac{2}{3}r$.
205.	18.	Geometra, imultis	Geometria, multis.
208.	2.	duobus	duabus.
Ibid.	21.	$-dcc$	$-bcc$.
210.	6.	$+bc^3$	$+b^3c$.
Ibid.	34.	$+a^3c\sqrt[3]{cdg}\,\vert\,a$	$+a^3 - c\sqrt[3]{cdg}\,\vert\,a$.
215.	22.	$+sy$	$+5y$.
218.	7.	$-rr$	$+rr$.
Ibid.	11.	$+\sqrt{\frac{1}{4}pp-y}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}pp-y}$
Ibid.	*ultima.*	$+\sqrt{\frac{1}{4}pp-q-y}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}pp-q-y}$.
220.	15.	$+q$	$-q$.
228.	21.	$-5mna^3$	$+5mna^3$.
235.	21.	$+20-18a$	$+20a-18$.

Cæteros errores typographicos levioris momenti, aut eos (ſi qui fortè extiterint) quos Authoris incuria, non inſcitia fuderit, benignus Lector condonabit.

Digitized by Google